

Численно-аналитический метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях

Проведен анализ численно-аналитических методов расчета переходных процессов в линейных электрических цепях и предложена методология их комбинации с методом схемных определителей. На основе данного подхода разработаны два варианта алгоритма расчета переходных процессов в линейных электрических цепях: первый основан на разделении решения на свободную и принужденную составляющие колебаний, второй – на представлении в виде преходящей и установившейся составляющих колебаний. Приведен пример расчета линейной электрической цепи, показаны преимущества и недостатки предложенных подходов.

Д.В. ШУШПАНОВ,
канд. техн. наук
(СПбГУТ, Санкт-Петербург)
dimasf@inbox.ru

Численно-аналитический метод, метод схемных определителей, преобразования Лапласа, переменные состояния, переходный процесс, линейная электрическая цепь

Несмотря на длительную историю исследования методов анализа переходных процессов в линейных электрических цепях [1], задача разработки новых подходов к их оценке сохраняет свою актуальность. Актуальность данной проблемы определяется двумя основными факторами. Во-первых, возрастают требования к точности решений, получаемых с помощью программных сред численного моделирования, о чем свидетельствует анализ научных публикаций [2–8]. Во-вторых, возникает необходимость в снижении временной сложности таких методов, что особенно значимо для систем передачи информации. Эффективные алгоритмы анализа являются ключевым фактором при создании вычислительных подсистем, ответственных за определение параметров каналов и настроек систем передачи информации [9–11]. Так, передаточная характеристика линейной электрической цепи может быть использована при реализации феноменологической модели канала [12].

Для линейной электрической цепи можно записать систему линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме (форме Коши) в матричном виде [13–15]

$$\dot{\vec{X}} = \mathbf{A}\vec{X} + \mathbf{B}\vec{X}_0, \quad (1)$$

где \mathbf{A} – квадратная матрица размера $n \times n$; \mathbf{B} – прямоугольная матрица размера $n \times m$; $\vec{X} = (\vec{i}_L \quad \vec{u}_C)^T$ – вектор переменных состояния (токи через индуктивности и напряжения на емкостях) размером n ; $\dot{\vec{X}}$ – вектор производных переменных состояния; $\vec{X}_0 = (\vec{i}_0 \quad \vec{u}_0)^T$ – вектор независимых источников тока и напряжения размером m .

В подавляющем большинстве программ схемотехнического моделирования формирование математической модели цепи не приводит к получению системы линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме (1). Вместо этого модель представляется в виде дифференциально-алгебраической системы уравнений [13, 14, 16]

$$\mathbf{M}\dot{\vec{X}} = \hat{\mathbf{A}}\vec{X} + \hat{\mathbf{B}}\vec{X}_0, \quad (2)$$

где вектор \vec{X} содержит как переменные состояния, так и дополнительные токи и напряжения цепи (зависит от метода получения системы (2)).

Преимущества применения системы (1) по сравнению с системой (2) обусловлены соображениями вычислительной эффективности. Использование дифференциально-алгебраической системы уравнений (2) вместо системы (1) приводит к необходимости оперирования матрицами большей размерности. Это, в свою очередь, усложняет вычислительную процедуру, особенно в контексте применения линейных многошаговых формул [14]. Следствием данных усложнений является увеличение времени расчета и по-

тенциальное снижение получаемого решения. В противоположность этому применение системы дифференциальных уравнений (1) позволяет использовать формулу Ньютона – Лейбница в матричной форме [17]

$$\bar{X}(t_0 + h) = e^{Ah} \bar{X}(t_0) + e^{A(t+h)} \int_{t_0}^{t_0+h} e^{-A\tau} \mathbf{B} \bar{X}_0(t_0) d\tau \quad (3)$$

для нахождения решения, что было реализовано в программе FASTMEAN [18, 19].

Единственным преимуществом использования дифференциально-алгебраической системы уравнений (2) для линейных электрических цепей в сравнении с системой дифференциальных уравнений (1) является относительная простота получения дифференциально-алгебраической системы уравнений (2). В работе [17] был предложен матрично-топологический метод, позволяющий для любой линейной электрической цепи получить систему дифференциальных уравнений (1). Кроме того, использование дифференциально-алгебраической системы уравнений (2) также позволяет относительно просто получить систему уравнений и для нелинейных цепей. Способы решения дифференциально-алгебраической системы уравнений для нелинейных цепей хорошо известны [13, 14, 16, 20, 21].

Наиболее распространенным подходом к решению системы (1) или (2) является использование численных методов расчета. Однако такие методы сопряжены с рядом ограничений [22–24]. Ключевой проблемой является обеспечение сходимости численного решения [14, 22], особенно в случае «жестких» систем [16, 20, 21, 23]. Кроме того, при реализации численного расчета на ЭВМ требуется обязательная оценка достоверности полученных результатов [24]. В отличие от численных методов, аналитические методы исследования линейных электрических цепей лишены таких недостатков.

Один из аналитических методов расчета переходных процессов линейных электрических цепей – это использование операторного метода [15]: при исходных воздействиях и начальных условиях находится изображение реакции и затем определяется его оригинал, т. е.

$$x_k(t) = \mathcal{L}^{-1}(X_k(p)), \quad (4)$$

где $X_k(p)$ – изображение реакции $x_k(t)$ с учетом всех внешних источников тока и напряжения, а также начальных условий на реактивных элементах; $\mathcal{L}^{-1}(x)$ – обратное преобразование Лапласа.

Применение метода преобразования Лапласа для компьютерной реализации сопряжено с принципиальными трудностями. Основное ограничение заключается в его неалгоритмируемости: для решения каждой конкретной задачи требуется подбор соответствующего изображения и переход к оригиналу. В связи с этим данный метод не реализован в программах схемотехнического моделирования и используется в основном для цепей невысокого порядка (обычно не больше второго-третьего).

Применение численно-аналитических методов расчета линейной электрической цепи позволяет совместить преимущества численных и аналитических методов: обеспечивается получение решения в замкнутой форме для цепей произвольного порядка цепи в приемлемое время расчета.

Целью данной статьи является рассмотрение численно-аналитических методов расчета переходных процессов в линейных электрических цепях с возможностью их объединения с аналитическим подходом для получения решения линейной электрической цепи в замкнутой форме.

Численно-аналитические методы

В работах [25, 26] рассматривается решение системы дифференциальных уравнений (1) как в виде суммы свободной и принужденной составляющих

$$\bar{X}(t) = \bar{X}_{\text{св}}(t) + \bar{X}_{\text{пр}}(t), \quad (5)$$

где $\bar{X}_{\text{св}}(t)$ – свободная составляющая колебания, т. е. колебание в цепи при отсутствии внешних воздействий при ненулевых начальных условиях

$$\bar{X}_{\text{св}}(t) = e^{At} \bar{X}(t_0) = \sum_{k=1}^n e^{a_k t} \mathbf{P}_k \bar{X}(t_0), \quad (6)$$

$\vec{X}_{\text{пр}}$ – принужденная составляющая колебания, т. е. колебание в цепи при наличии внешних воздействий при нулевых начальных условиях

$$\vec{X}_{\text{пр}}(t) = e^{At} \vec{F}(A) - \vec{F}(A;t) = \sum_{k=1}^n \left(e^{a_k t} \mathbf{P}_k \vec{F}(a_k;0) - \mathbf{P}_k \vec{F}(a_k;t) \right), \quad (7)$$

так и в виде суммы переходящей и установившейся составляющих

$$\vec{X}(t) = \vec{X}''(t) + \vec{X}'(t), \quad (8)$$

где $\vec{X}''(t)$ – переходящая составляющая колебания, т. е. колебание в цепи при отсутствии внешних воздействий при начальных условиях $\vec{X}(t_0) - \vec{X}'(t_0)$, которая равна

$$\vec{X}''(t) = e^{At} \left(\vec{X}(t_0) + \vec{F}(A) \right) = \sum_{k=1}^n e^{a_k t} \mathbf{P}_k \left(\vec{X}(t_0) + \vec{F}(a_k;0) \right), \quad (9)$$

$\vec{X}'(t)$ – установившаяся составляющая колебания, характеризующая установившуюся переменную состояния в новом установившемся режиме

$$\vec{X}'(t) = -\vec{F}(A;t) = -\sum_{k=1}^n \mathbf{P}_k \vec{F}(a_k;t), \quad (10)$$

\mathbf{P}_k – проекторы матрицы A ; a_k – собственные значения системы (1); $F_k(p;t)$ – преобразование Лапласа сдвинутой влево k -й компоненты вектор-функции $\mathbf{B}\vec{X}_0$ [25].

Выражения (6) – (9) приведены для случая некратных корней. При наличии кратных корней данные уравнения усложняются [25, 26]. Рассматриваемый подход впоследствии был адаптирован и для решения дифференциально-алгебраической системы уравнений [27]. Ключевыми преимуществами данного подхода применительно к системам (1) или (2) являются возможность получения решения в замкнутой форме, отсутствие необходимости вычисления матричной экспоненты; универсальность подхода, позволяющая получить как аналитическое решение (для цепей невысокого порядка, как правило, не превышающего третий-четвертый), так и численно-аналитическое. Вместе с тем ограничением метода является возрастающая трудоемкость определения спектра матрицы A и полюсов компонент вектора $\vec{F}(p;t)$ при увеличении размерности решаемого уравнения [25].

В работе [16] был представлен точный аналитический вид решения дифференциально-алгебраической системы уравнений (2):

$$\vec{X}(t) = \sum_{k=1}^n e^{p_k t} \mathbf{Z}_k \mathbf{M} \vec{X}(t_0) + \sum_{k=1}^n \mathbf{Z}_k \int_{t_0}^t e^{p_k(t-\tau)} \hat{\mathbf{B}} \vec{X}_0(\tau) d\tau + \mathbf{Q}_0 \hat{\mathbf{B}} \vec{X}_0(t), \quad (11)$$

а также численно-аналитический метод решения дифференциально-алгебраической системы уравнений (2):

$$\vec{X}(t) = \sum_{k=1}^n e^{p_k t} \mathbf{Z}_k \mathbf{M} \vec{X}(t_0) + \sum_{k=1}^n \mathbf{Z}_k \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p - p_k} \mathfrak{L}(\hat{\mathbf{B}} \vec{X}_0(t)) \right\} + \mathbf{Q}_0 \hat{\mathbf{B}} \vec{X}_0(t), \quad (12)$$

где \mathbf{Z}_k – квадратная матрица вычетов размера $n \times n$; p_k – корни уравнения $p\mathbf{M} - \hat{A} = 0$; \mathbf{Q}_0 – корни алгебраической части решения дифференциально-алгебраической системы уравнений (2); n – количество переменных состояния; $\mathfrak{L}(x)$, $\mathfrak{L}^{-1}(x)$ – прямое и обратное преобразование Лапласа.

В случае использования системы дифференциальных уравнений (1) вместо дифференциально-алгебраической системы уравнений (2) выражение (12) упрощается:

$$\vec{X}(t) = \sum_{k=1}^n e^{p_k t} \mathbf{Z}_k \vec{X}(t_0) + \sum_{k=1}^n \mathbf{Z}_k \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p - p_k} \mathfrak{L}(\mathbf{B} \vec{X}_0(t)) \right\}, \quad (13)$$

где Z_k – квадратная матрица вычетов размера $n \times n$; p_k – корни характеристического уравнения $pI - A = 0$, I – единичная матрица; n – количество переменных состояния.

Получаем, что выражение (13) – это запись уравнения Ньютона – Лейбница в матричной форме (3) через обратное преобразование Лапласа, но не в численном виде, а в численно-аналитическом. Выражение (13) является аналогом выражений (6), (7). Здесь также, в отличие от выражения (3), отсутствует матричная экспонента, что является большим преимуществом выражения (13). В дополнение в выражении (13) используется прямое и обратное преобразование Лапласа в отличие от выражения (7), где используется преобразование Лапласа, сдвинутое влево, что также может являться преимуществом.

Другими словами, выражение (13) – это операторный метод решения (его численно-аналитическая версия) линейной электрической цепи [15], т. е. аналог выражения (4), но в нем разделены воздействия, параметры схемы и начальные условия. Использование выражения (13), так же, как выражений (6), (7), имеет общий недостаток: достаточно сложно получить различные операторные передаточные функции цепи в виде рациональной дроби большого порядка (даже в численном виде) и найти все корни характеристического уравнения цепи. Для численного нахождения корней характеристического уравнения чаще всего использовался QR-алгоритм [28, 29]. В дополнение к этому нахождение операторных передаточных функций цепи высокого порядка (уже начиная с четвертого порядка) было до недавнего времени относительно непростой задачей. В связи с этим указанные подходы, представленные выражениями (6), (7), (13), не нашли широкого практического применения для расчета линейной электрической цепи. Данные методы применялись главным образом в учебных целях при анализе цепей второго и третьего порядка.

Метод схемных определителей

Для получения операторной передаточной функции цепи в символьном виде можно воспользоваться методом схемных определителей [30–32]. Метод схемных определителей позволяет найти в символьном виде операторную передаточную функцию линейной электрической цепи любой сложности сразу в виде двух полиномов (числителя и знаменателя) без дополнительных (лишних, избыточных) математических преобразований. Данный метод реализован в программе CirSym [33, 34]. Символьный блок CirSym включен в состав программы FASTMEAN [19, 35].

Метод схемных определителей позволяет использовать операторный метод для расчета линейной электрической цепи произвольного порядка. С помощью метода схемных определителей определяются требуемые передаточные функции цепи, корни характеристического уравнения можно найти либо аналитически (для цепей не старше четвертого порядка), либо численно с помощью математических программ (MATLAB, Mathematica, Maple, Polynomial Root Finder и др.)

В работе [36] с помощью метода схемных определителей были найдены изображения необходимых реакций линейной электрической цепи и с помощью программы Maple определены их оригиналы. В итоге в работе [36] был использован классический операторный метод, основанный на использовании выражения (4). Применение данного подхода целесообразно преимущественно для ручного анализа и малоэффективно при машинном автоматическом моделировании, поскольку, кроме модуля метода схемных определителей, требуется дополнительная разработка математического модуля расчета оригинала функции по ее изображению. С ростом порядка линейной электрической цепи такая процедура может привести к существенному увеличению вычислительных затрат, вследствие чего метод уступает по быстрдействию численному методу.

В работе [37] описана методика получения в аналитическом виде системы дифференциальных уравнений (1) методом схемных определителей для любой линейной электрической цепи. В работе [38] с использованием данной методики методом схемных определителей составляется система дифференциальных уравнений (1) и находится ее решение в виде уравнения (8).

Для этого сначала составляется система дифференциальных уравнений (1), из которой получаем систему k -й степени

$$p^k \vec{X} = A p^{k-1} \vec{X} + B p^{k-1} \vec{X}_0, \quad (14)$$

где k варьируется от 1 до $n-1$, а n согласно работе [37] равно

$$n = n_C + n_L - n_{SL} - n_{KC} - n_{SC} - n_{KL}, \quad (15)$$

где n_C, n_L – число конденсаторов и катушек индуктивностей; n_{KC}, n_{SL} – число обобщенных емкостных контуров и индуктивных сечений; n_{SC}, n_{KL} – число обобщенных емкостных сечений и индуктивных контуров.

Преходящая составляющая $\vec{X}''(t)$ [25], или собственная составляющая $\vec{X}_c(t)$ [15] колебания, или общее решение системы дифференциальных уравнений (1) [15], находится в виде

$$\vec{X}''(t) = \vec{X}_c(t) = \left(\sum_{k=1}^n A_{1k} t^{s-1} e^{p_k t} \quad \dots \quad \sum_{k=1}^n A_{nk} t^{s-1} e^{p_k t} \right)^T, \quad (16)$$

где A_{ij} – постоянные интегрирования; n – количество переменных состояния согласно формуле (15); p_k – корни определителя схемы; s – кратность k -го корня.

Установившаяся составляющая колебания $\vec{X}'(t)$ [25], или частное решение системы дифференциальных уравнений (1) [15], находится в виде

$$\vec{X}'(t) = \left(\sum_{k=1}^m B_{1k} e^{p_k t} \quad \dots \quad \sum_{k=1}^m B_{1k} e^{p_k t} \right)^T, \quad (17)$$

где B_{ij} – постоянные интегрирования; m – количество полюсов всех независимых источников возмущения; p_k – полюса независимых источников возмущения.

Выражения (16), (17) являются численными версиями решений (9), (10). Для нахождения решения (16), (17) необходимо численно найти постоянные интегрирования A_{ij}, B_{ij} . Для этого сначала необходимо по известным начальным условиям $\vec{X}(t_0)$ и $\vec{X}'(t_0)$ по формуле (14) определить $p^k \vec{X}(t_0)$ и $\mathbf{B} p^k \vec{X}'(t_0)$ для каждого k от 1 до $n-1$. Далее по формулам (16), (17) необходимо найти $p^k \vec{X}''(t_0)$ и $p^k \vec{X}'(t_0)$. В итоге получаем две системы линейных алгебраических уравнений:

$$p^k \vec{X}(t_0) = p^k \vec{X}''(t_0); \quad \mathbf{B} p^k \vec{X}'(t_0) = p^k \vec{X}'(t_0), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (18)$$

решение которых и определяет постоянные интегрирования A_{ij} и B_{ij} .

Данный подход определения решения системы дифференциальных уравнений (1) подходит для любой линейной электрической цепи и не требует дополнительного математического аппарата, как в работе [36], но дополнительно необходимо решать две системы линейных алгебраических уравнений.

Свободная и принужденные составляющие колебания

Объединим подходы численно-аналитических методов и метод схемных определителей. Рассмотрим сначала свободную составляющую колебаний, т. е. выражение (6) или первое слагаемое в решении (13):

$$\vec{X}_{св}(t) = \sum_{k=1}^n e^{p_k t} \mathbf{Z}_k \vec{X}(t_0), \quad (19)$$

или

$$\vec{X}_{св}(t) = \left(\sum_{k=1}^n e^{p_k t} z_{1k} x_{свk}(t_0) \quad \dots \quad \sum_{k=1}^n e^{p_k t} z_{nk} x_{свk}(t_0) \right)^T. \quad (20)$$

Вычет z_{ij} в случае некрatных корней p_j равен [15, 39]

$$z_{ij} = \frac{M_{ij}(p_j)}{dN(p_j)/dp}, \quad (21)$$

где $N(p)$ – определитель всей схемы; $M_{ij}(p)$ – числитель операторной передаточной функции цепи, в которой в качестве воздействия выступает начальное условие $x_j(t_0)$, а в качестве реакции – $x_i(t)$.

При наличии кратных корней вместо элемента $x_{свi}(t)$ в векторе $\vec{X}_{св}(t)$ получаем решение в общем случае [39]:

$$x_{свi}(t) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \left[\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \left(\frac{(p - p_j)^{n_k}}{N(p)} e^{pt} \sum_{j=1}^n (x_j(t_0) M_{ij}(p)) \right) \right], \quad (22)$$

где p_k – корни полинома $N(p)$, а n_k – их кратности, и сумма берется по всем корням $N(p)$.

Используя метод схемных определителей, можно достаточно просто определить знаменатель $N(p)$ и числитель $M_{ij}(p)$. Для этого достаточно в линейной электрической цепи (рис. 1, а) отключить независимые источники возмущения, а для каждой переменной состояния (ток в дросселе и напряжение на конденсаторе) подключить начальное условие в виде независимого источника напряжения или тока и использовать, например, CirSym или FASTMEAN. Для определения тока в дросселе предпочтительно использование последовательной схемы, а для определения напряжения на конденсаторе более удобной является параллельная схема (рис. 1, б).

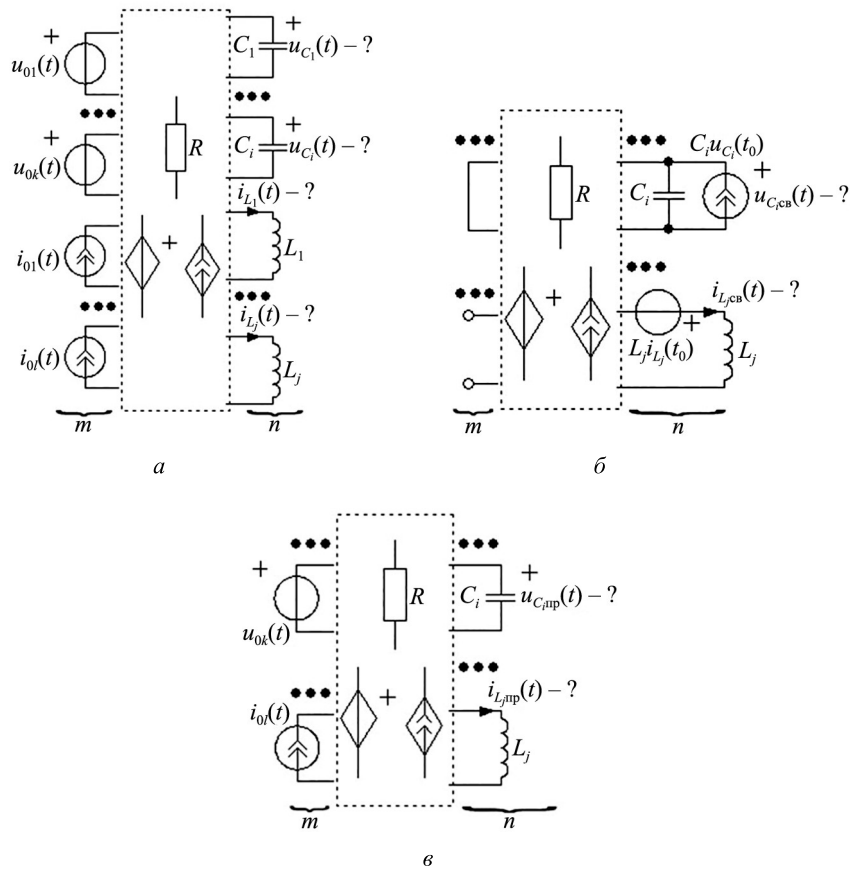


Рис. 1

В этом случае с помощью метода схемных определителей можно достаточно легко аналитически или численно (подставив параметры элементов) определить полином $N(p)$, найти его корни p_k (например, с помощью программы Polynomial Root Finder) и с помощью выражений (21), (22) заполнить матрицу Z_k . Тогда для вычисления вектора $\vec{X}_{св}(t)$ порядка n необходимо определить и хранить $n^2 + 3n + 1$ значений. Такой подход обеспечивает возможность прямого вычисления любого элемента вектора $\vec{X}_{св}(t)$ в требуемый момент t , что является преимуществом по сравнению с любым численным методом.

Принужденная составляющая колебаний, т. е. второе слагаемое в решении (13), с одной стороны, равна

$$\bar{X}_{\text{пр}}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{Z}_k \mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p - p_k} \mathfrak{L}(\mathbf{B} \bar{X}_0(t)) \right\}, \quad (23)$$

с другой стороны, принужденная составляющая колебаний имеет вид [25]

$$\bar{X}_{\text{пр}}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \bar{X}_0(\tau) d\tau = e^{At} * \mathbf{B} \bar{X}_0(t), \quad (24)$$

что согласно свойствам преобразованию Лапласа можно переписать в следующем виде:

$$\bar{X}_{\text{пр}}(t) = \mathfrak{L}^{-1}(\mathbf{H}(p) \cdot \bar{X}_0(p)), \quad (25)$$

где $\mathbf{H}(p)$ – матрица передаточных функций переменных состояния от независимых внешних воздействий при нулевых начальных условиях; $\bar{X}_0(p)$ – вектор изображений независимых внешних воздействий.

Выражения (24), (25) соответствуют определению принужденной составляющей [25], т. е. колебаниям в линейной электрической цепи при наличии внешних независимых воздействий и нулевых начальных условиях. Выражение (24) записано во временной области (области вещественной переменной t), а выражение (25) – в операторной (области комплексной переменной p).

Таким образом, используя выражение (25) и метод схемных определителей (для определения передаточных функций), можно достаточно просто определить принужденную составляющую колебания. Для этого в линейной электрической цепи (см. рис. 1, а) независимые источники возмущения заменяются на свои изображения в операторной форме. Далее для каждой переменной состояния (ток в дросселе и напряжение на конденсаторе) находится передаточная функция от внешних воздействий (рис. 1, в), и изображения источников и передаточные функции подставляются в выражение (25). Предложенный подход аналогичен методике [17, 40], но в данном случае происходит разделение на свободную и принужденную составляющую, что позволяет независимо оперировать каждой из компонент, что невозможно при использовании численного метода.

Представив каждый множитель в виде рациональной дроби, выражение (25) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\text{пр}}(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \frac{M_{11}(p)}{N(p)} & \cdots & \frac{M_{1m}(p)}{N(p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{M_{n1}(p)}{N(p)} & \cdots & \frac{M_{nm}(p)}{N(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{M_{01}(p)}{N_{01}(p)} \\ \vdots \\ \frac{M_{0m}(p)}{N_{0m}(p)} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \left(\mathfrak{L}^{-1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{M_{1j}(p)}{N(p)} \frac{M_{0j}(p)}{N_{0j}(p)} \right) \cdots \mathfrak{L}^{-1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{M_{nj}(p)}{N(p)} \frac{M_{0j}(p)}{N_{0j}(p)} \right) \right)^T, \end{aligned} \quad (26)$$

где n – количество переменных состояния; m – количество независимых источников возмущения.

Используя теорему разложения для некрратных полюсов, в которые входят полюса самой линейной электрической цепи и полюса изображений всех воздействий, элемент вектора (26) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{M_{1j}(p)}{N(p)} \frac{M_{0j}(p)}{N_{0j}(p)} \right) &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \frac{M_{1j}(p_k)}{dN(p_k)/dp} \frac{M_{0j}(p_k)}{N_{0j}(p_k)} e^{p_k t} + \sum_{i=1}^q \frac{M_{1j}(p_i)}{N(p_i)} \frac{M_{0j}(p_i)}{dN_{0j}(p_i)/dp} e^{p_i t} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n z_{1k} \frac{M_{0j}(p_k)}{N_{0j}(p_k)} e^{p_k t} + \sum_{i=1}^q \frac{M_{1j}(p_i)}{N(p_i)} \frac{M_{0j}(p_i)}{dN_{0j}(p_i)/dp} e^{p_i t} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

где n – количество переменных состояния; m – количество независимых источников возмущения; q – количество полюсов изображения возмущения.

Таким образом, согласно выражению (27) добавление источника возмущения в линейную электрическую цепь корректирует вычет z_{ij} , вычисленный для свободной составляющей, и добавляет множители, как если бы в цепь добавили дополнительные переменные состояния. Другими словами, выражение (27) показывает замену независимого источника на зависимый с новыми переменными состояниями, как это было сделано в работах [17, 40]. В этом случае l -е решение принужденной составляющей можно переписать в следующем виде:

$$x_{\text{пр}}(t) = \sum_{k=1}^n z_{lk} \sum_{j=1}^m \frac{M_{0j}(p_k)}{N_{0j}(p_k)} e^{p_k t} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^q \frac{M_{1j}(p_i)}{N(p_i)} \frac{M_{0j}(p_i)}{dN_{0j}(p_i)/dp} e^{p_i t}. \quad (28)$$

Таким образом, можно сформировать следующий алгоритм нахождения решения системы дифференциальных уравнений (1) в виде свободной и принужденной составляющих.

1. Найти определитель схемы и найти его корни p_k .
2. Сформировать матрицу вычетов Z_k .
3. Найти $\bar{X}_{\text{св}}(t)$ с помощью выражения (19).
4. Определить изображение для каждой переменной состояния при нулевых начальных условиях и всех воздействиях.
5. Определить элементы вектора $\bar{X}_{\text{пр}}(t)$ с помощью выражения (28).
6. Найти решение $\bar{X}(t)$ в виде суммы $\bar{X}_{\text{св}}(t)$ и $\bar{X}_{\text{пр}}(t)$.

В качестве примера рассмотрим цепь второго порядка с двумя различными источниками напряжения – постоянным и гармоническим (рис. 2). В этом случае имеем две переменные состояния – напряжение на конденсаторе $u_C(t)$ и ток в катушке индуктивности $i_L(t)$.

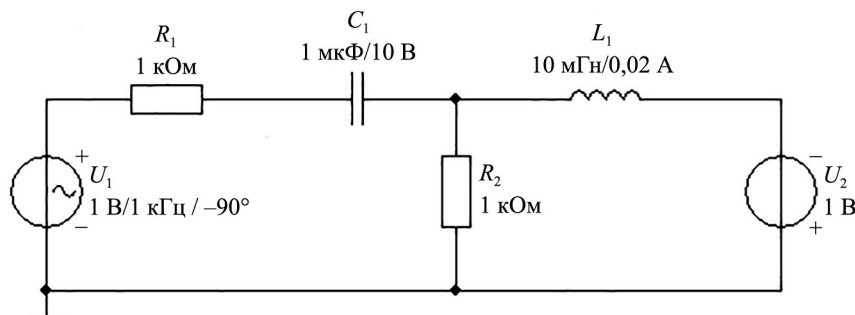


Рис. 2

С помощью метода схемных определителей находим определитель схемы:

$$N(p) = p^2 L_1 C_1 (R_1 + R_2) + p(C_1 R_1 R_2 + L_1) + R_2. \quad (29)$$

Подставляя параметры схемы ($R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$; $C_1 = 1 \text{ мкФ}$; $L_1 = 10 \text{ мГн}$), получаем следующий определитель схемы

$$N(p) = 2 \cdot 10^{-5} p^2 + 1,01 p + 10^3, \quad (30)$$

из которого находим два корня

$$p_1 = -1010,31; \quad p_2 = -49489,69. \quad (31)$$

Так как корни некрратные, для определения вычетов воспользуемся формулой (21). Для определения элементов матрицы Z_k с помощью метода схемных определителей найдем передаточные функции

для напряжения на конденсаторе и тока в катушке индуктивности с выключенными внешними воздействиями и добавленными начальными условиями (см. рис. 1, б):

$$U_{C_{св}}(p) = \frac{C_1 u_{C_1}(t_0)(pL_1(R_1 + R_2) + R_1 R_2) - L_1 i_{L_1}(t_0) R_2}{N(p)}; \quad (32)$$

$$I_{L_{св}}(p) = \frac{C_1 u_{C_1}(t_0) R_2 + L_1 i_{L_1}(t_0)(pC_1(R_1 + R_2) + 1)}{N(p)}. \quad (33)$$

При исходных параметрах схемы ($R_1 = R_2 = 1$ кОм; $C_1 = 1$ мкФ; $L_1 = 10$ мГн) и начальных условиях ($u_{C_1}(t_0) = 10$ В; $i_{L_1}(t_0) = 0,02$ А) получаем следующую матрицу Z_k :

$$Z_k = \begin{pmatrix} 9,8989903 & 0,1010097 \\ 0,01010314 & 0,00989686 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

С помощью выражений (19), (31), (34) определим свободную составляющую колебаний для RLC -цепи (см. рис. 2):

$$u_{C_1_{св}}(t) = 9,8989903e^{-1010,31t} + 0,1010097e^{-4989,69t}; \quad (35)$$

$$i_{L_1_{св}}(t) = 0,01010314e^{-1010,31t} + 0,00989686e^{-4989,69t}. \quad (36)$$

С помощью метода схемных определителей определим изображения переменных состояния в схеме (см. рис. 2) при нулевых начальных условиях и ненулевых источниках:

$$U_C(p) = -\frac{U_1(p)(pL_1 + R_2) + U_2(p)R_2}{N(p)}; \quad (37)$$

$$I_L(p) = \frac{U_1(p)pC_1R_2 + U_2(p)(pC_1(R_1 + R_2) + 1)}{N(p)}. \quad (38)$$

Определим изображения каждого источника возмущения. Для первого источника (источник синусоидального напряжения) изображение будет равно [15]

$$u_1(t) = U_1 \sin(\omega t) \rightarrow U_1(p) = \frac{U_1 \omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (39)$$

Для второго источника (источник постоянного напряжения) изображение будет равно [15]

$$u_2(t) = U_2 \rightarrow U_2(p) = \frac{U_2}{p}. \quad (40)$$

Подставляем изображения источников (39), (40) в формулы (37), (38) и при исходных параметрах схемы ($R_1 = R_2 = 1$ кОм; $C_1 = 1$ мкФ; $L_1 = 10$ мГн) и источников ($U_1 = U_2 = 1$ В; $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ 1/с) получаем:

$$U_{св}(p) = -\frac{2\pi 10^3 (3 \cdot 10^{-2} p + 3 \cdot 10^3)}{(p^2 + 4\pi^2 10^6)(2 \cdot 10^{-5} p^2 + 1,01 p + 10^3)} - \frac{10^3}{p(2 \cdot 10^{-5} p^2 + 1,01 p + 10^3)}; \quad (41)$$

$$I_{св}(p) = \frac{2\pi 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} p}{(p^2 + 4\pi^2 10^6)(2 \cdot 10^{-5} p^2 + 1,01 p + 10^3)} + \frac{2 \cdot 10^{-3} p + 1}{p(2 \cdot 10^{-5} p^2 + 1,01 p + 10^3)}. \quad (42)$$

Из выражений (41), (42) определяем полюса и вычеты (таблица).

№ п/п	Полюс	Вычет		
		$x_0(t)$	$u_C(t)$	$u_L(t)$
1	-1010,31	$u_{01}(t)$	-0,1583933	$-1,616599 \cdot 10^{-4}$
		$u_{02}(t)$	1,02084	$1,041893 \cdot 10^{-3}$
2	-49489,69	$u_{01}(t)$	$1,315222 \cdot 10^{-3}$	$1,288646 \cdot 10^{-4}$
		$u_{02}(t)$	-0,02084003	$-2,041893 \cdot 10^{-3}$
3	$\pm j6283,190$	$u_{01}(t)$	$0,07853906 \pm j7,554822 \cdot 10^{-3}$	$1,639763 \cdot 10^{-5} \mp j4,945058 \cdot 10^{-4}$
4				
5	0	$u_{02}(t)$	-1	10^{-3}

Согласно формуле (28) и таблице получаем решение для принужденной составляющей напряжения на конденсаторе $u_C(t)$:

$$u_{C_{\text{пр}}}(t) = -0,1583933e^{-1010,31t} + 1,02084e^{-1010,31t} + 1,315222 \cdot 10^{-3} e^{-49489,69t} - 0,02084003e^{-49489,69t} + (0,07853906 + j7,554822 \cdot 10^{-3})e^{j6283,190t} + (0,07853906 - j7,554822 \cdot 10^{-3})e^{-j6283,190t} - 1 \quad (43)$$

и решение для вынужденной составляющей тока в дросселе $i_{L_1}(t)$:

$$i_{L_{1\text{пр}}}(t) = -1,616599 \cdot 10^{-4} e^{-1010,31t} + 1,041893 \cdot 10^{-3} e^{-1010,31t} + 1,288646 \cdot 10^{-4} e^{-49489,69t} - 2,041893 \cdot 10^{-3} e^{-49489,69t} + (1,639763 \cdot 10^{-5} - j4,945058 \cdot 10^{-4})e^{j6283,190t} + (1,639763 \cdot 10^{-5} + j4,945058 \cdot 10^{-4})e^{-j6283,190t} + 10^{-3} \quad (44)$$

Суммируя выражения (35) и (43), получаем напряжение на конденсаторе $u_C(t)$:

$$u_C(t) = 9,8989903e^{-1010,31t} + 0,1010097e^{-4989,69t} + 0,8624467e^{-1010,31t} - 0,0195248e^{-49489,69t} + 0,1578032 \cos(6283,19t + 5,494485^\circ) - 1 \quad (45)$$

Суммируя выражения (36) и (44), получаем ток в дросселе $i_L(t)$:

$$i_L(t) = 0,01010314e^{-1010,31t} + 0,00989686e^{-49489,69t} + 8,802329 \cdot 10^{-4} e^{-1010,31t} - 1,9130281 \cdot 10^{-3} e^{-49489,69t} + 9,895551 \cdot 10^{-4} \cos(6283,19t - 88,10079^\circ) + 10^{-3} \quad (46)$$

Приведем временные диаграммы напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ (рис. 3, а) и тока в дросселе $i_L(t)$ (рис. 3, б), полученные численно в программе FASTMEAN и по формулам (45), (46). Графики абсолютного отклонения для напряжения на конденсаторе Δ_U показаны на рис. 3, в, тока в дросселе Δ_I – на рис. 3, г.

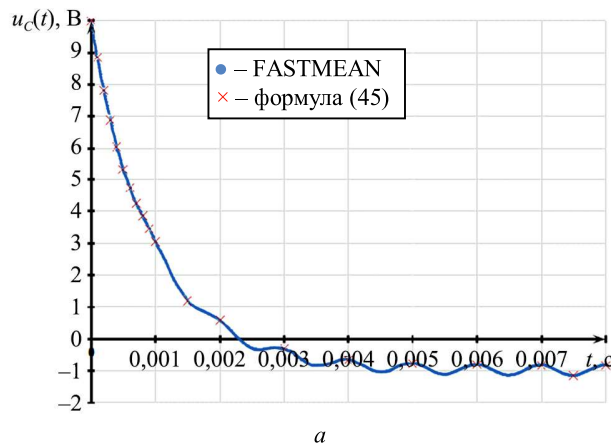


Рис. 3 (Начало)

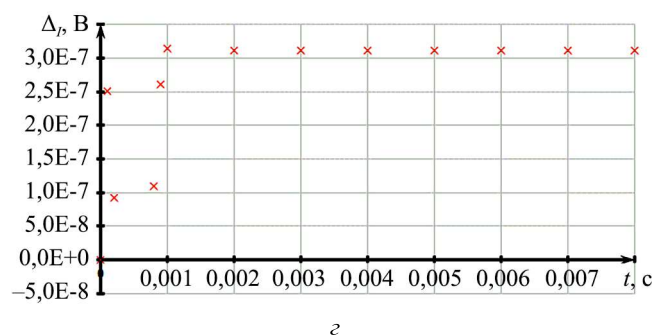
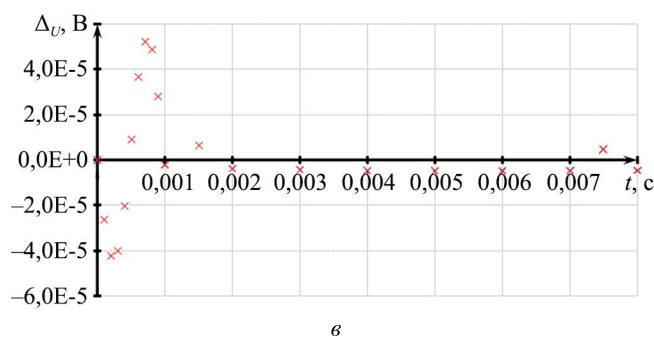
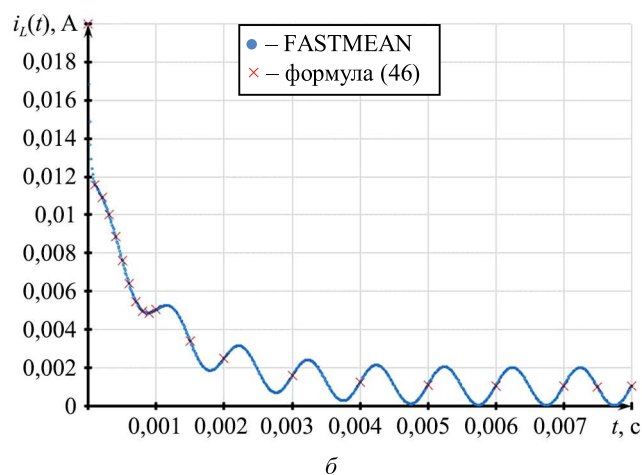


Рис. 3 (Окончание)

Как видно из рис. 3, в, г, ошибка находится в пределах вычислительной погрешности, обусловленной точностью вычислений (менее 10^{-5} абсолютной величины или менее 0,001 % относительной величины).

Преходящая (собственная) и установившаяся составляющие колебаний

Как видно из выражений (23), (28), элементы матрицы Z_k каждый раз корректируются с добавлением независимого источника тока или напряжения. Это демонстрирует приведенный пример, где при нахождении принужденной составляющей (выражения (43), (44)) появляются слагаемые при одинаковых множителях $e^{p_k t}$, которые необходимо сложить. Для устранения такой избыточности вместо формулы (5), т. е. представления решения в виде свободной и принужденной составляющих, следует использовать формулу (8) или представление решения в виде преходящей и установившейся составляющих. В этом случае согласно выражениям (19), (27) можно записать преходящую, или собственную, составляющую колебаний в следующем виде:

$$\vec{X}_c(t) = \vec{X}''(t) = \sum_{k=1}^n e^{p_k t} \left(\mathbf{Z}_k \vec{X}(t_0) + \mathbf{Z}_k^* \vec{X}^* \right), \quad (47)$$

где Z_k^* – прямоугольная матрица размера $n \times m$, определяющая вычеты для переменной состояния при определенном независимом источнике возмущения (см. рис. 1, в); \bar{X}^* – вектор размера m , который показывает влияние источников возмущения на свободную составляющую колебаний:

$$\bar{X}^* = \left(\sum_{j=1}^m \frac{M_{0j}(p_n)}{N_{0j}(p_1)} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^m \frac{M_{0j}(p_n)}{N_{0j}(p_n)} \right)^T, \quad (48)$$

и установившуюся составляющую колебаний

$$\bar{X}'(t) = \left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^q \frac{M_{1j}(p_i)}{N(p_i)} \frac{M_{0j}(p_i)}{dN_{0j}(p_i)/dp} e^{p_i t} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^q \frac{M_{nj}(p_i)}{N(p_i)} \frac{M_{0j}(p_i)}{dN_{0j}(p_i)/dp} e^{p_i t} \right)^T. \quad (49)$$

Здесь: n – количество переменных состояния; m – количество независимых источников возмущения; q – количество полюсов изображения возмущения.

В выражении (47) элементы матрицы Z_k определяются с помощью метода схемных определителей по рис. 1, б, а элементы матрицы Z_k^* – по рис. 1, в. Например, в приведенной электрической цепи (см. рис. 2) элементы матрицы Z_k определяются из уравнений (32), (33), а элементы матрицы Z_k^* – из уравнений (37), (38).

Формула (49) для установившейся составляющей колебаний записана для случая неравенства полюсов изображения возмущений p_i и корней характеристического уравнения p_k . Это возможно только в случае устойчивых цепей, т. е. когда корни определителя цепи имеют отрицательную вещественную составляющую. Случай расчета неустойчивых цепей, когда полюса изображения возмущений p_i кратны корням характеристического уравнения p_k , следует рассмотреть отдельно.

В итоге получаем, что преходящая, или собственная, составляющая колебаний содержит информацию о начальных условиях (первое слагаемое в (47)), а также информацию о вынужденной составляющей (второе слагаемое в (47) – выражение (48)). Установившаяся составляющая колебаний согласно выражению (49) содержит информацию только о возмущении и демонстрирует, какая часть возмущения приходит к переменной состояния.

Таким образом, можно сформировать альтернативный алгоритм нахождения решения системы дифференциальных уравнений (1) через собственную (преходящую) и установившуюся составляющие колебаний в несколько этапов.

1. Найти определитель схемы и найти его корни p_k .
2. Сформировать матрицу вычетов Z_k .
3. Определить элементы матрицы $Z_k^* \bar{X}^*$ с помощью выражения (48).
4. Определить элементы вектора $\bar{X}_c(t)$ с помощью выражения (47).
5. Определить элементы вектора $\bar{X}'(t)$ с помощью выражения (49).
6. Найти решение $\bar{X}(t)$ в виде суммы $\bar{X}_c(t)$ и $\bar{X}'(t)$.

Упрощение расчета системы линейных дифференциальных уравнений

В силу того что типы основных воздействий всегда ограничены и хорошо известны, для каждого воздействия можно сразу записать выражения (48), (49). Так, для источника постоянного напряжения $u_0(t) = U_0$ получаем добавку к принужденной составляющей от данного источника, равную

$$\frac{M_{0ki}(p_k)}{N_{0i}(p_k)} = \frac{U_0}{p_k}, \quad (50)$$

и установившуюся составляющую, создаваемую данным источником:

$$\sum_{i=1}^q \frac{M_{ij}(p_i)}{N(p_i)} \frac{M_{0j}(p_i)}{dN_{0j}(p_i)/dp} e^{p_i t} = \frac{M_{ij}(0)}{N(0)} = H_{ij}(0). \quad (51)$$

В этом случае для исходной цепи (см. рис. 2) согласно выражениям (37), (38) источник постоянно напряжения $u_2(t)$ корректирует амплитуду свободной составляющей на величину, равную

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_k^* \bar{X}^* &= U_0 \begin{pmatrix} -\frac{R_2}{p_1 N'(p_1)} & -\frac{R_2}{p_2 N'(p_2)} \\ \frac{p_1 C_1 (R_1 + R_2) + 1}{p_1 N'(p_2)} & \frac{p_2 C_1 (R_1 + R_2) + 1}{p_2 N'(p_2)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,02084 & -0,02084003 \\ 1,041893 \cdot 10^{-3} & -2,041893 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (52)$$

и для переменных состояния вводит установившуюся составляющую, равную

$$\bar{X}'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{R_2}{N(0)} \\ \frac{0C_1 (R_1 + R_2) + 1}{N(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}, \quad (53)$$

что соответствует данным таблицы.

Для источника синусоидального напряжения $u_0(t) = U_0 \sin(\omega t)$ получаем добавку к принужденной составляющей от данного источника, равную

$$\frac{M_{0ki}(p_k)}{N_{0i}(p_k)} = \frac{U_0 \omega}{p_k^2 + \omega^2}, \quad (54)$$

и установившуюся составляющую, создаваемую данным источником:

$$\sum_{i=1}^q \frac{M_{ij}(p_i)}{N(p_i)} \frac{M_{0j}(p_i)}{dN_{0j}(p_i)/dp} e^{p_i t} = |H_{ij}(j\omega)| U_0 \sin(\omega t + \theta(\omega)), \quad (55)$$

где

$$|H_{ij}(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} = \frac{M_{ij}(j\omega)}{N(j\omega)}. \quad (56)$$

В этом случае для исходной цепи (см. рис. 2) согласно выражениям (37), (38) источник постоянно напряжения $u_1(t)$ корректирует амплитуду свободной составляющей на величину, равную

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_k^* \bar{X}^* &= U_0 \omega \begin{pmatrix} -\frac{p_1 L_1 + R_2}{(p_1^2 + \omega^2) N'(p_1)} & -\frac{p_2 L_1 + R_2}{(p_2^2 + \omega^2) N'(p_2)} \\ \frac{p_1 C_1 R_2}{(p_1^2 + \omega^2) N'(p_2)} & \frac{p_2 C_1 R_2}{(p_2^2 + \omega^2) N'(p_2)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -0,1583933 & 1,315222 \cdot 10^{-3} \\ -1,616599 \cdot 10^{-4} & 1,288646 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (57)$$

и для переменных состояния вводит установившуюся составляющую

$$\begin{aligned} \vec{X}'(t) &= U_0 \omega \begin{pmatrix} -\frac{p_{i1}L_1 + R_2}{N(p_{i1})} & -\frac{p_{i2}L_1 + R_2}{N(p_{i2})} \\ \frac{p_{i1}C_1R_2}{N(p_{i1})} & \frac{p_{i2}C_1R_2}{N(p_{i2})} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,07853906 + j7,554822 \cdot 10^{-3} & 0,07853906 - j7,554822 \cdot 10^{-3} \\ 1,639763 \cdot 10^{-5} - j4,945058 \cdot 10^{-4} & 1,639763 \cdot 10^{-5} + j4,945058 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (58)$$

что соответствует данным таблицы.

Вместо матрицы (58) установившееся решение можно представить в виде матричного выражения (55), т. е.

$$|H_{ij}(j\omega)| = \begin{pmatrix} 0,1578032 \\ 9,895551 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}; \theta(\omega) = \begin{pmatrix} 5,494485^\circ \\ -88,10079^\circ \end{pmatrix}. \quad (59)$$

В случае использования всех возможных видов возмущений необходимо сделать таблицу соответствий между конкретным возмущением и выражениями (48), (49), что может значительно упростить расчет системы дифференциальных уравнений (1).

Если использовать такой подход, т. е. использовать выражения (47) и (49) вместо (19) и (25), можно не формировать уравнение (45), имеющее избыточные слагаемые, а, используя выражения (52), (53), (57), (59), сразу сформировать

$$\begin{aligned} u_C(t) &= 10,76144e^{-1010,31t} - 0,08148485e^{-4989,69t} + \\ &+ 0,1578032 \cos(6283,19t + 5,494485^\circ) - 1. \end{aligned} \quad (60)$$

Данный подход обеспечивает сокращение вычислительных затрат, что способствует уменьшению времени выполнения расчетов и повышению их точности, а также оптимизации использования оперативной памяти. Кроме того, использование выражения (47) вместо выражений (25), (35), (37) обеспечивает определение длительности переходного процесса и анализ устойчивости электрической цепи [41] по вычисленной собственной (преходящей) составляющей – задачи, практически нереализуемые в рамках численных методов. Сформированное решение системы дифференциальных уравнений (1) в замкнутой форме для линейной электрической цепи позволяет также использовать его и для нелинейных электрических цепей, в которых нелинейные резистивные элементы заменены различными схемами замещения с идеальными диодами [42, 43].

Возможно, имеет практический смысл разделение решения $X(t)$ не на два слагаемых, а на три:

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_{св}(t) + \vec{X}_{св0}(t) + \vec{X}'(t), \quad (61)$$

где $\vec{X}_{св}(t)$ – свободная составляющая колебаний, определяемая начальными условиями; $\vec{X}_{св0}(t)$ – свободная составляющая колебаний, определяемая параметрами источников возмущения; $\vec{X}'(t)$ – установившаяся составляющая колебаний.

В этом случае сумма второго и третьего слагаемых в выражении (61) дают принужденную составляющую, а сумма первого и второго слагаемых в выражении (61) – преходящую составляющую. Такое разделение в численно-аналитическом методе позволяет сразу по отдельности рассматривать составляющие, т. е. влияние начальных условий и источников возмущения на переходный процесс в линейных электрических цепях, что в численных методах невозможно. Например, такое разделение решения $\vec{X}(t)$ может упростить расчет пульсаций выходного напряжения и тока в дросселе в импульсном преобразователе напряжения [44].

В статье показана возможность совмещения численно-аналитических методов с методом схемных определителей. Предложено два алгоритма расчета переходных процессов в линейных электрических цепях – через свободную и принужденную составляющие колебаний и через преходящую и установившуюся составляющие колебаний.

Приведен пример расчета линейной электрической цепи через свободную и принужденную составляющие колебаний. Выявлены ограничения данного подхода. Продемонстрированы преимущества метода расчета переходных процессов в линейных электрических цепях через преходящую и установившуюся составляющие колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lerner I.M.* On the Question of Choosing a Method for Analyzing Transient Processes for Developing the Theory of Resolution Time. Retrospective Analytical Review // T-Comm. 2021. № 8. P. 62–70.
2. *Lerner I.M.* To the Matter of Optimization of the Amplitude-Frequency Responses of Communication Channels with PSK-n-Signals Based on the Theory of Resolution Time // T-Comm. 2019. № 9. С. 36–49.
3. *Lerner I.M.* Influence of the Shape of the Amplitude-Frequency Response on the Capacity of Communication Channel with Memory Using APSK-n Signals, which Implements the Theory of Resolution Time // T-Comm. 2019. № 10. С. 45–59.
4. *Лернер И.М., Ильин Г.И.* Об одной возможности увеличения скорости передачи при наличии дестабилизирующих факторов в системах связи, использующих взаимную интерференцию символов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. № 4. С. 24–34.
5. *Лернер И.М., Ильин Г.И.* Ограничение пропускной способности избирательными системами при воздействии ФМн-н-сигнала // Нелинейный мир. 2017. № 1. С. 8–12.
6. *Lerner I.M., Il'in G.I.* Capacity of P-Cascade Tuned Filter with an Impact PSK-n-Signal // Proc. of the 13th International Scientifictechnical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering, г. Новосибирск, 3–6 окт. 2016. Новосибирск: НГТУ, 2016. Vol. 1. Ч. 1. P. 443–447.
7. *Lerner I.M., Chernyavskii S.M., Kadushkin V.V.* The Development of Radioengineering Data Transmission System for FSK-n Signals with Continuous Phase Based on the Theory of Resolution Time // H&ES Research. 2020. Vol. 12. № 5. P. 22–35.
8. *Lerner I.M., Файзуллин Р.Р., Чернявский С.М.* К вопросу повышения спектральной эффективности фазовых радиотехнических систем передачи информации, функционирующих при сильных межсимвольных искажениях // Изв. вузов. Авиационная техника. 2018. № 1. С. 113–118.
9. *Lerner I.M., Khairullin A.N.* Resolution Time Theory in the Topic of Broadband Communications. Algorithm for Data Dependent Jitter and Capacity Estimations with Polynomial Time Execution // T-Comm. 2023. № 5. С. 48–57.
10. *Chirov D.S., Lobova E.O.* Wideband HF Signals Dispersion Distortion Compensator Based on Digital Filter Banks. Theory and Approbation // T-Comm. 2020. № 4. С. 57–65.
11. *Аджемов С.С. и др.* Алгоритмы оценки и компенсации дисперсионных искажений широкополосных сигналов ионосферных радиолиний связи // Научные технологии в космических исследованиях Земли. 2021. № 5. С. 57–74.
12. *Lerner I.M., Khairullin A.N., Grigoriev S.G.* Application of Resolution Time Theory to the Develop and Performance Estimation of Broadband Data Transmission Systems Based on Bipolar PAM-n Signals Under Impaction of Crosstalk // T-Comm. 2025. Vol. 19. № 8. P. 72–84.
13. *Чуа Л.О., Пен-Мин Лин.* Машинный анализ электронных схем. М.: Энергия, 1980. 640 с.
14. *Влах И., Сингхал К.* Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М.: Радио и связь, 1988. 560 с.
15. *Белецкий А.Ф.* Теория линейных электрических цепей. СПб.: Лань, 2009. 544 с.
16. *Гридин В.Н., Михайлов В.Б., Шустерман Л.Б.* Численно-аналитическое моделирование радиоэлектронных схем. М.: Наука, 2008. 339 с.
17. *Артым А.Д., Филин В.А., Есполов К.Ж.* Новый метод расчета процессов в электрических цепях. СПб.: Элмор, 2001. 192 с.
18. *Филин В.А., Смирнов В.С.* Отечественная разработка универсальной программы ускоренного компьютерного анализа процессов в радиотехнических цепях // Связисты СПбГУТ и телекоммуникации XXI века: Сб. тр. юбилейн. науч. конф., г. Санкт-Петербург, 12–13 окт. 2000. СПб.: СПбГУТ, 2000. С. 126–127.
19. *Смирнов В.С., Филин В.А.* Программа FASTMEAN для моделирования электронных цепей // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. междунар. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике», г. Ульяновск, 17–19 мая 2005. Ульяновск: УлГТУ, 2005. Т. 3. С. 174–176.
20. *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.

21. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
22. Демирчян К.С. и др. Проблемы численного моделирования процессов в электрических цепях // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. 1982. № 2. С. 94–114.
23. Пилипенко А.М. Гибридные методы высокого порядка точности для численного анализа во временной области жестких и колебательных цепей // Моделирование, оптимизация и информационные технологии [Электронный журнал]. 2017. № 3 (18). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=367> (дата обращения: 7.10.2025).
24. Овчинников И.Г., Овчинников И.И., Кононович В.Н. Оценка достоверности численных расчетов при проектировании: доверять или не доверять компьютерам? // Модернизация и научные исследования в транспортном комплексе. 2012. Т. 3. С. 377–388.
25. Демирчян К.С., Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. М.: Высшая школа, 1988. 335 с.
26. Бутырин П.А. Разработка аналитических и численно-аналитических методов решения уравнений состояния электрических цепей: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. М., 1993. 33 с.
27. Жохова М.П. Аналитическое определение установившихся составляющих решения уравнений состояния электрических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 2001. 22 с.
28. Хори Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 656 с.
29. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
30. Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраическое моделирование и расчет линейных электрических цепей. Ульяновск: УлГТУ, 2005. 319 с.
31. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных аналоговых и дискретно-аналоговых электрических цепей. Ульяновск: УлГТУ, 2008. 284 с.
32. Курганов С.А., Филаретов В.В. Топологические правила и формулы для анализа электрических цепей без избыточности. Ульяновск: УлГТУ, 2010. 109 с.
33. Вольнов В.Е., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ сложных электрических цепей и сетей с помощью программы CIRS YMD // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. междунар. конф. Ульяновск: УлГТУ, 2004. Т. 4. С. 27–30.
34. Филаретов В.В. Программа символьного анализа CIRS YM: история создания, структура и функции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. Ульяновск: УлГТУ, 2012. Вып. 10. С. 158–171.
35. Смирнов В.С. Символьный анализ линейных моделей мощных ключевых устройств в программе FASTMEAN // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. междунар. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике», г. Ульяновск, 16–18 мая 2006. Ульяновск: УлГТУ, 2006. С. 181–187.
36. Курганов С.А., Соловьев В.А. Об аналитическом расчете переходных процессов при несимметричных замыканиях в трехфазных электрических цепях с взаимоиндуктивностями // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей. Междунар. сб. науч. тр. Ульяновск: УлГТУ, 2017. № 14. С. 35–44.
37. Курганов С.А., Филаретов В.В. Формирование уравнений состояния линейных электрических цепей с обобщенными индуктивными сечениями и емкостными контурами // Электричество. 2013. № 9. С. 49–55.
38. Курганов С.А., Прокофьев И.А. Нахождение начальных условий в классическом методе анализа электрических цепей с помощью программы CIRS YM // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар. сб. науч. тр. Ульяновск: УлГТУ, 2017. № 14. С. 58–67.
39. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
40. Артым А.Д., Филин В.А. Матрично-топологические методы анализа переходных процессов в электрических цепях. СПб.: СПбГУТ, 1993. 52 с.
41. Шушпанов Д.В. Использование символьно-топологического метода для анализа устойчивости линейных электрических цепей // Успехи современной радиоэлектроники. 2025. № 7. С. 14–47.
42. Шушпанов Д.В. Псевдоаналитический расчет реактивной цепи первого порядка с идеальными диодами // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2018. № 4. С. 158–163.
43. Шушпанов Д.В. Использование метода схемных определителей для определения моментов переключения идеальных диодов в резистивной цепи // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар. сб. науч. тр. Ульяновск: УлГТУ, 2024. С. 49–73.
44. Дмитриков В.Ф. и др. Исследование пульсаций выходного напряжения транзисторного преобразователя понижающего типа // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2007. № 2. С. 86–93.

Поступила в редакцию 7.11.25
 После доработки 10.11.25
 Принята к публикации 10.11.25

Numerical-Analytical Method for Transient Analysis in Linear Electric Circuits

D.V. SHUSHPANOV

Bonch-Bruевич Saint Petersburg State University of Telecommunications, Saint Petersburg

An analysis of numerical-analytical methods for transient analysis in linear electrical circuits was carried out and a methodology for their combination with the circuit determinants method was proposed. Based on this approach, two variants of the algorithm for transient analysis in linear electrical circuits were developed, namely, the first is based on dividing the solution into free and forced components of oscillations, the second is based on representation in the form of transient and steady-state components of oscillations. An example of calculating a linear electrical circuit is given, and the advantages and disadvantages of the proposed approaches are shown.

Numerical-analytical method, circuit determinants method, Laplace transforms, state variables, transient analysis, linear electrical circuit