

О способе решения задачи идентификации обобщенных жесткостных характеристик протяженных силовых конструкций с использованием упругого контрольного элемента

Т.Ю. ГАЙНУТДИНОВА,

канд. техн. наук,

В.Г. ГАЙНУТДИНОВ,

д-р техн. наук,

ЧАНЦИН ХУ,

аспирант,

Р.Ф. МИНГАЗОВ,

аспирант,

Н.А. МЫСОВСКИЙ,

аспирант,

Л.А. ФАЗЛИЕВ,

аспирант

(КНИТУ-КАИ, Казань)

tgainut@mail.ru

Предлагается способ решения задачи идентификации обобщенных жесткостных параметров силовой структуры на основе формирования общего уравнения относительно параметров жесткости с использованием метода наименьших квадратов и общего уравнения равновесия упругого контрольного элемента, представляемого составной конструкцией из отдельных элементов. Деформирование упругих контрольных элементов определяется компонентами локальных упругих обобщенных перемещений и обобщенными реакциями в точках сопряжения упругих контрольных элементов. Рассмотрена схема диагностики силовой структуры с использованием упругих контрольных элементов, проведение которой возможно в лабораторных и полевых условиях.

Решение задачи идентификации, получение устойчивого решения, составная конструкция, обобщенные жесткостные характеристики, диагностика силовой структуры, упругий контрольный элемент

Разработка способов оперативной диагностики жесткостных параметров, определяющих несущие свойства конструкции летательного аппарата в лабораторных или реальных условиях эксплуатации, является важной задачей. Решение данной задачи позволит существенно снизить потери дорогостоящей авиационной техники, уменьшить число аварий и катастроф, связанных с возможной деградацией характеристик несущей способности силовых конструкций. Изменение жесткости может быть обусловлено не только разрушением отдельных элементов силовой конструкции, но и податливостью соединений этих элементов.

Оценку параметров жесткости силовой конструкции обычно называют структурной идентификацией. Для этой цели предполагается априорная параметрическая математическая модель силовой структуры, описывающая статическую (или динамическую) реакцию системы. Затем экспериментально измеряется фактическая реакция системы на определенное воздействие внешних сил. Задача определения обобщенных характеристик жесткости относится к обратным задачам. В большинстве своем обратные задачи являются некорректными [1]. Неустойчивость решения таких задач и ошибки численных методов увеличивают результирующую погрешность. Получение устойчивого решения имеет принципиальное значение при решении задач диагностики состояния силовой конструкции. В связи с этим значительная часть исследований в данной области сосредоточена на разработке методов, позволяющих решать эту некорректную задачу.

Во многих работах используется метод регуляризации [1], который представляет собой развитие метода наименьших квадратов и метода псевдообратной матрицы [2]. К универсальным методам решения обратных задач относятся итерационные методы, основанные на методах оптимизации [3]. В этом случае отказываются от непосредственного решения обратной задачи как таковой, и искомые величины определяются в процессе многократного решения прямой задачи. В работе [4] показана возможность идентификации нестационарных параметров и приведены классы задач теории управления, которые могут решаться на основе алгоритма чувствительности. В работах [5–8] представлены методы алгоритмического и программного обеспечения для анализа свойств и оценивания состояния тонкостенных силовых конструкций, а также действующих на них нагрузок. В работах [5–8] также отмечается, что наиболее простым подходом к решению задачи идентификации является алгоритм, при котором жесткостные параметры включаются в систему уравнений в качестве неизвестных и определяются непосредственно

в ходе ее решения. Однако указывается, что такой подход практически неприменим для решения задач идентификации из-за неустойчивости решения.

В данной статье предлагается способ и получение устойчивого решения непосредственно в ходе решения системы уравнений, в которые жесткостные параметры входят в качестве неизвестных. При этом решение задачи идентификации обобщенных жесткостных параметров силовой структуры достигается наиболее простым и экономичным способом.

Для оценки обобщенных характеристик жесткости протяженных силовых конструкций самолета, крыла, оперения, фюзеляжа, мотогондол и т. п. в каждой из них может быть установлен специальный упругий контрольный элемент (УКЭ), «копирующий» деформирование конкретной силовой структуры при изгибе и кручении. Пример реализации такого элемента для крыла сверхлегкого самолета представлен на рис. 1.

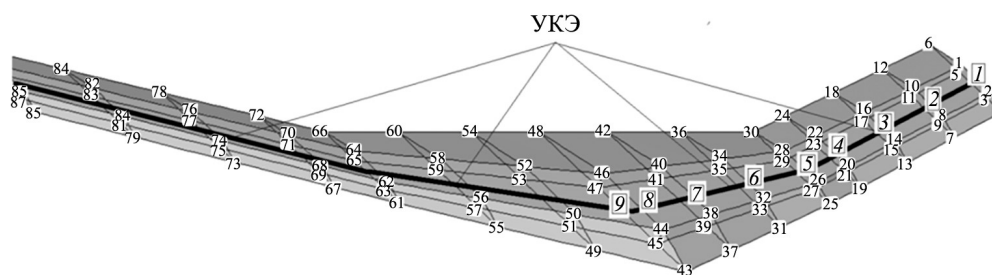


Рис. 1

Характеристики УКЭ малы и не влияют на несущую способность силовой конструкции. УКЭ предназначены для установки сенсоров с целью получения данных о деформации силовой конструкции при нагружении внешними силами. Оценка несущей способности силовой конструкции производится на основе расчета обобщенных жесткостных характеристик с использованием полученных данных о деформировании УКЭ (нескольких УКЭ) совместно с силовой конструкцией. Математическая модель УКЭ и схема его внедрения в силовую структуру формируются в соответствии с выбранными для контроля обобщенными жесткостными характеристиками силовой конструкции, например, определяющими несущую способность конструкции при изгибе в двух плоскостях, кручении, растяжении-сжатии.

Решение задачи идентификации характеристик жесткости силовой конструкции начинается с построения уравнения равновесия упругой структуры. В случае статической нагрузки общее уравнение равновесия имеет следующий вид:

$$[G(k)]\{U\} = \{P\}, \quad (1)$$

где $[G]$ – матрица жесткости конструкции; $(k)^T$ – вектор обобщенных жесткостных параметров элементов силовой конструкции размерностью n ; U – вектор обобщенных упругих перемещений размерностью m ; P – вектор обобщенных внешних нагрузок размерностью m .

Для идентификации параметров жесткости уравнение (1) обычно представляется в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} A_1(U)_m \\ \dots \\ A_n(U)_m \end{bmatrix} \{k\}_n = \{P\}_m, \quad (2)$$

где $\{k\}_n$ – вектор обобщенных жесткостных характеристик; $A_i(U)_m$ – матричные блоки, элементы которых определяются вычисленными или замеренными компонентами деформаций УКЭ.

В численных экспериментах компоненты деформаций вычисляются по определенным при решении прямой задачи компонентам вектора упругих перемещений $(U)_m$ УКЭ. Для получения решения (или

псевдорешения) уравнения (2) обычно применяется метод наименьших квадратов, в соответствии с которым уравнение (2) представляется в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} A_1(\mathbf{U})_m & \dots & A_n(\mathbf{U})_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(\mathbf{U})_m \\ \dots \\ A_n(\mathbf{U})_m \end{bmatrix} \{\mathbf{k}\}_n = \begin{bmatrix} A_1(\mathbf{U})_m & \dots & A_n(\mathbf{U})_m \end{bmatrix} \{\mathbf{P}\}_m. \quad (3)$$

Такова общая простая схема решения задачи идентификации жесткостных параметров элементов силовой конструкции. Однако задачи идентификации осложняются получением устойчивого решения уравнения (3) вследствие особенностей структуры разрешающей матрицы, полученной с использованием метода наименьших квадратов.

Рассмотрим этапы формирования уравнения равновесия упругой конструкции (1) методом конечных элементов. Формирование матричного уравнения (1) проводится в нескольких этапов. Удельная энергии деформирования элемента силовой конструкции $\Delta W(\mathbf{e})$ как функция компонент деформаций $\mathbf{e}$ может быть представлена в матричной форме $\Delta W \Delta W(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \left[d^2 F(\mathbf{e}) / (d\mathbf{e})^2 \right] \mathbf{e}$. Симметричная матрица $\left[d^2 F(\mathbf{e}) / (d\mathbf{e})^2 \right]$ определяется жесткостными коэффициентами конструкционного материала, например, C^{ijkl} :

$$\left[\frac{d^2 F(\mathbf{e})}{(d\mathbf{e})^2} \right] = \begin{bmatrix} C^{1111} & 2C^{1112} & 2C^{1113} & C^{1122} & 2C^{1123} & C^{1133} \\ & 4C^{1212} & 2C^{1213} & 2C^{1222} & 2C^{1223} & 2C^{1233} \\ & & 4C^{1313} & 2C^{1322} & 2C^{1323} & 2C^{1333} \\ & & & C^{2222} & 2C^{2223} & C^{2233} \\ & & & & 4C^{2323} & 2C^{2333} \\ & & & & & C^{3333} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Коэффициенты упругости C^{ijkl} , в свою очередь, определяются техническими параметрами упругости E_{11} , E_{22} , E_{33} , G_{12} , G_{13} , G_{23} :

$$C^{1111} = E_{11} (\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}) / \Omega; \quad C^{2222} = E_{22} (1 - \mu_{13}\mu_{31}) / \Omega; \quad C^{3333} = E_{33} (1 - \mu_{12}\mu_{21}) / \Omega; \\ C^{1212} = G_{12}; \quad C^{1313} = G_{13}; \quad C^{2323} = G_{23}; \quad \Omega = 1 - \mu_{12}\mu_{21} - \mu_{23}\mu_{32} + \mu_{13}\mu_{31} - 2\mu_{12}\mu_{23}\mu_{31}.$$

В методе конечных элементов матрица $\left[d^2 F(\mathbf{e}) / (d\mathbf{e})^2 \right]$ трансформируется в симметричную матрицу $d^2 F(\mathbf{v}) / (d\mathbf{v})^2$, если компоненты деформаций $\mathbf{e}$ определить через компоненты вектора узловых перемещений $\mathbf{v}_i$. Это преобразование можно записать следующим матричным соотношением:

$$\left[\frac{d^2 \Delta F(\mathbf{v}_i)}{(d\mathbf{v}_i)^2} \right] = [\mathbf{B}]^T \left[\frac{d^2 F(\mathbf{e})}{(d\mathbf{e})^2} \right] [\mathbf{B}] = [\Delta \mathbf{G}], \quad (5)$$

где элементы матрицы $[\mathbf{B}]$ определяются соотношениями, связывающими компоненты деформации $\mathbf{e}$ и векторы обобщенных перемещений $\mathbf{v}_i$ в узлах конечного элемента силовой структуры. Для этого на основании принятых гипотез выводятся соответствующие соотношения, позволяющие определить компоненты матрицы $[\mathbf{B}]$ аналитическими выражениями. При большом количестве узловых точек элемента и использовании суперэлементного подхода, например, для трехслойных или многослойных несущих панелей разрабатываются вычислительные алгоритмы формирования матриц $[\mathbf{B}]$. Для криволинейных панелей тонкостенной трехслойной конструкции при вычислении компонент деформаций

$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial \mathbf{v} / \partial \alpha \cdot \partial \mathbf{r} / \partial \beta + \partial \mathbf{v} / \partial \beta \cdot \partial \mathbf{r} / \partial \alpha)$ необходимо учесть изменения базисных векторов координатной поверхности $\partial \mathbf{r} / \partial \beta$, $\partial \mathbf{r} / \partial \alpha$. Получить аналитические выражения для сложной геометрии поверхности в виде функций параметров α, β типа $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, \beta)$ затруднительно. В этом случае также составляется алгоритм вычисления элементов матрицы $[B]$ с использованием, например, сплайн-аппроксимации векторных функций.

После интегрирования ΔG по объему элемента силовой структуры полученная матрица жесткости $G(E_{11}, E_{22}, E_{33}, G_{12}, G_{13}, G_{23})$ элемента может быть представлена суммой ее составляющих:

$$G = (J_{E_{11}}) \Delta G_1 + (J_{E_{22}}) \Delta G_2 + (J_{E_{33}}) \Delta G_3 + (J_{G_{12}}) \Delta G_4 + (J_{G_{13}}) \Delta G_5 + (J_{G_{23}}) \Delta G_6, \quad (6)$$

где $J_{E_{11}}, \dots, J_{G_{23}}$ – обобщенные жесткостные параметры элемента силовой конструкции первого уровня; ΔG_{1-6} определяются элементами сформированной матрицы $[B]$. При использовании гипотез упругого деформирования элементов силовой конструкции, например, гипотезы плоских сечений для тонкостенных стержней элементы матрицы $[B]$ определяются в соответствии с этими гипотезами, а обобщенные жесткостные параметры определяются жесткостями растяжения-сжатия EF , кручения GJ_{ro} , изгиба в двух плоскостях EJ_3, EJ_2 . При формировании упругой модели силовой структуры общая нумерация узлов конечных элементов предполагает минимизацию размера общей матрицы разрешающего уравнения равновесия (1). Обычно это относится к минимизации размера ширины «ленточной» матрицы для протяженных структур или формированию блочных матриц для разветвленных структур, что подразумевает разработку соответствующего экономичного алгоритма решения уравнения (1) с «ленточной» или блочной матрицей.

УКЭ «копирует» деформирование сложной силовой конструкции как некоторой балки с жесткостями растяжения-сжатия EF , кручения GJ_{ro} , изгиба в двух плоскостях – EJ_3, EJ_2 . Для этого в математической модели УКЭ деформирование ее двухузлового элемента удобно определить двенадцатью компонентами $[u_1, u_2, u_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3]_i, [u_1, u_2, u_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3]_j$ в глобальных координатах – тремя компонентами линейных перемещений u_1, u_2, u_3 и тремя компонентами угловых $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ в каждом узле.

Вариантов физической модели упругого контрольного элемента, «копирующей» деформирование силовой структуры, может быть много. На рис. 2, а показан упругий контрольный элемент, встроенный в силовую пирамидальную структуру из четырех элементов. Номерами 1–6 отмечены узлы элементов силовой структуры и УКЭ. На рис. 2, б элементы структуры расположены в линию и фактически дублируют друг друга. В этом случае рассчитанные по уравнению (3) обобщенные характеристики жесткости структуры, определенные с помощью упругого контрольного элемента, должны быть равны сумме жесткостных параметров ее элементов.

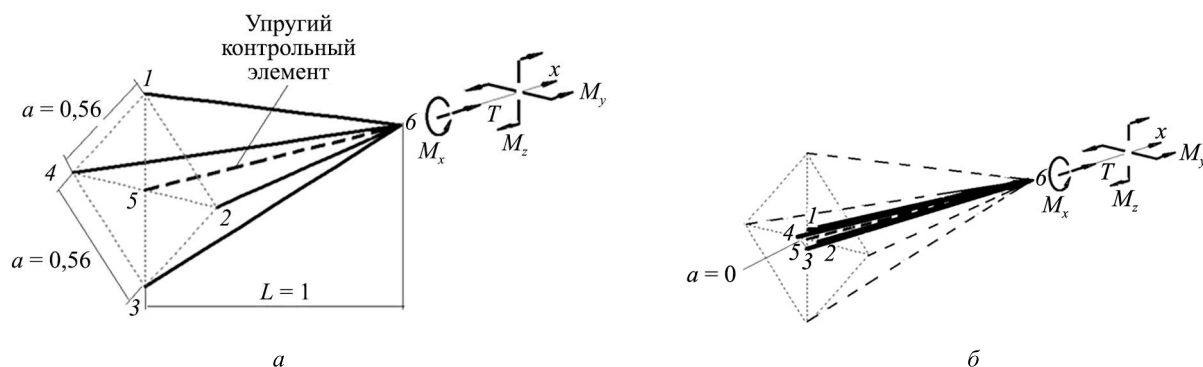


Рис. 2

Идентифицированные с использованием уравнения (3) обобщенные жесткостные параметры силовой структуры (см. рис. 2, б) из четырех элементов с числовыми данными $EF_{1+4} = 10,0$, $(GJ_r = EJ_y = EJ_z)_{1+4} = 0,2$ и для упругого контрольного элемента $(EF = GJ_r = EJ_y = EJ_z)_{\text{УКЭ}} = 0,01$ совпадают с простой суммой жесткостей силовых элементов структуры, включая упругий контрольный элемент (табл. 1, $a = 0$). Обобщенные параметры жесткости для пирамидальной структуры (см. рис. 2, б) приведены в табл. 1 ($a = 0,56$).

Таблица 1

Значение обобщенных параметров жесткости	Обобщенные жесткостные параметры структуры			
	EF	GJ_r	EJ_y	EJ_z
При $a = 0$	40,01	0,81	0,81	0,81
При $a = 0,56$	32,03	1,65	1,2	1,2

Для силовой структуры (см. рис. 2, б) покажем возможность определения зоны деградации обобщенных жесткостей EF , GJ_r , EJ_y , EJ_z по размаху упругого контрольного элемента. В табл. 2 показан пример расчета при последовательном исключении элемента силовой структуры из режима изгиба. Конкретный элемент из этой зоны по данным изменения обобщенных жесткостных характеристик упругого контрольного элемента выделить невозможно, поскольку в данном случае влияние на величину обобщенной жесткости каждого из четырех элементов этой группы одинаково.

Таблица 2

Случаи деградации (обнуления) изгибной жесткости элемента силовой структуры	Относительные значения изменения обобщенных жесткостей УКЭ			
	EF	GJ_r	EJ_y	EJ_z
$(EJ_y = EJ_z)_1 = 0,0$	1	1	0,88	0,88
$(EJ_y = EJ_z)_2 = 0,0$	1	1	0,88	0,88
$(EJ_y = EJ_z)_3 = 0,0$	1	1	0,88	0,88
$(EJ_y = EJ_z)_4 = 0,0$	1	1	0,88	0,88

Однако в случае разных значений изгибной жесткости элементов силовой структуры, например $(EJ_y, EJ_z)_2 = 2(EJ_y, EJ_z)_1$, $(EJ_y, EJ_z)_3 = 3(EJ_y, EJ_z)_1$, $(EJ_y, EJ_z)_4 = 4(EJ_y, EJ_z)_1$, можно определить конкретный элемент, в котором произошла деградация жесткостного параметра. Результаты расчета представлены в табл. 3.

Таблица 3

Случаи деградации (обнуления) изгибной жесткости элемента силовой структуры	Относительные значения изменения обобщенных жесткостей УКЭ			
	EF	GJ_r	EJ_y	EJ_z
$(EJ_y = EJ_z)_1 = 0,0$	1	1	0,93	0,93
$(EJ_y = EJ_z)_2 = 0,0$	1	1	0,85	0,85
$(EJ_y = EJ_z)_3 = 0,0$	1	1	0,78	0,78
$(EJ_y = EJ_z)_4 = 0,0$	1	1	0,71	0,71

Благодаря приведенным примерам возможно проведение диагностики состояния элементов силовой структуры неразрушающими способами в лабораторных или даже в полевых условиях при наличии соответствующей расчетной программы и сформированной базы данных с помощью расчетных экспериментов.

При формировании уравнения (2) для вычисления элементов матричных блоков $A_1(U)_m$ необходимо знать величины не только компонент перемещений U_m , но компоненты деформаций, которые либо

рассчитываются по значениям узловых перемещений в расчетных экспериментах, либо замеряются тензодатчиками на упругом контрольном элементе. Наиболее рациональной физической моделью упругого контрольного элемента для идентификации обобщенных жесткостей EF , GJ_r , EJ_y , EJ_z может быть тонкостенная эластичная труба с установленными на ней розетками тензодатчиков в точках a , b , c , d (рис. 3, *а*). На рис. 3, *б* показана схема размещения тензодатчиков в розетке, на рис. 3, *в* – значения углов размещения тензодатчиков в розетке.

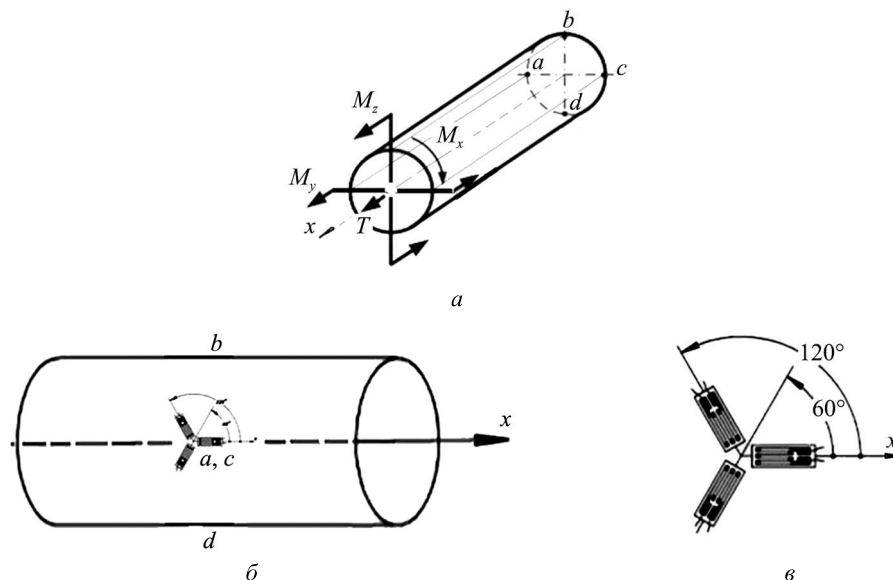


Рис. 3

Деформации ε_x , ε_y , γ_{xy} в связанной с контрольной точкой декартовой системе координат определяются замеренными значениями ε_α , ε_β , ε_γ тензорозетки в трех направлениях следующим матричным соотношением:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ \cos^2 \gamma & \sin^2 \gamma & \cos \gamma \sin \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_\gamma \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

где α , β , γ – углы установки тензодатчиков в розетке. Компоненты деформаций ε_x , ε_y , γ_{xy} , в свою очередь, вычисляются по компонентам обобщенных перемещений, например, продольная деформация при изгибе $\varepsilon_x^u = \frac{1}{\rho} y$, где $\frac{1}{\rho}$ – кривизна при изгибе упругого контрольного элемента (рис. 4, *а*); $\gamma_{xy} = d\varphi_1/dx$ – производная угла закручивания упругого контрольного элемента (рис. 4, *б*).

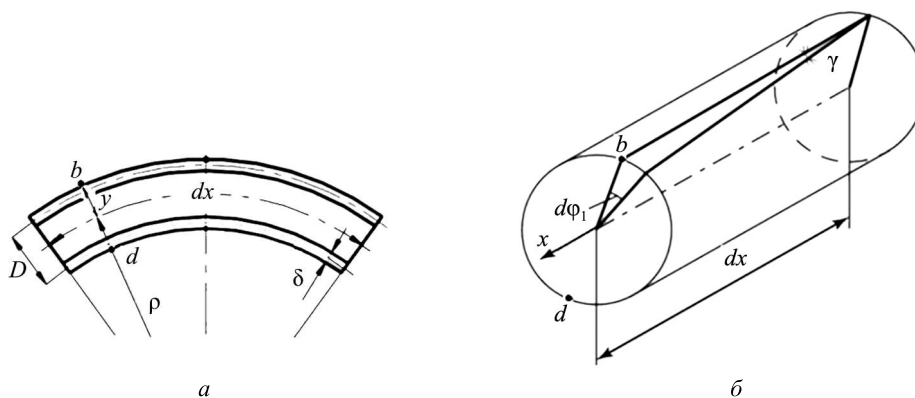


Рис. 4

Использование формального подхода при формировании системы уравнений (3) имеет существенный недостаток. Из-за особенностей разрешающей матрицы уравнений (3) не всегда возможно получить устойчивое решение при использовании стандартной процедуры решения систем линейных уравнений. Иллюстрирует это простой расчетный пример. Будем увеличивать число элементов консольной балочной модели упругого контрольного элемента при решении задачи идентификации изгибной жесткости EJ с использованием уравнения (3).

В табл. 4 приведены значения идентифицированных величин изгибной жесткости при увеличении числа звеньев УКЭ N_b . При $N_b \geq 10$ решение матричного уравнения (3) становится неустойчивым.

Таблица 4

N_b	EJ_i									
1	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	10	10								
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
10	-1,61	-1,61	-1,58	-1,515	-1,407	-1,249	-1,038	-0,768	-0,438	-0,049

В случае неразрезного упругого контрольного элемента с шарнирным соединением в нескольких точках по размаху аналогичная проблема возникает при меньшем количестве упругих контрольных элементов N_b . Для решения этой проблемы предложено множество вычислительных схем, которые так или иначе сводятся к итерационному поиску решения методами решения экстремальных задач.

Рассмотрим следующий подход. При формировании уравнения равновесия (1) будем рассматривать общий УКЭ как эластичную конструкцию, состоящую из отдельных элементов. Деформирование каждого отдельного элемента общего УКЭ определим локальными обобщенными перемещениями (с фактическим их дублированием в точках стыковки) и соответствующими неизвестными обобщенными реакциями X_k взаимодействия этих отдельных элементов. Принимая величину реакции взаимодействия X_k отдельных элементов $i-j$ в точке стыковки пропорциональной разности обобщенных перемещений $U_i - U_j$: $X_k = k_p (U_i - U_j)_k$, вариационное уравнение равновесия (1) запишем в общем виде следующим соотношением:

$$\delta \sum_{n=1,N} W_n + \delta \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} k_p (U_i - U_j)_k^2 = \delta \sum_{n=1,N} A_n, \quad (8)$$

где W_n – энергия упругого деформирования элемента n ; k_p – обобщенная жесткость упругой связи в точке стыковки k элементов $i-j$; A_n – работа внешних сил для элемента n . За счет дублирования компонент обобщенных перемещений общее число степеней свободы упругой модели при этом увеличится и будет определяться суммой локальных компонент всех упругих контрольных элементов.

При использовании уравнения равновесия (8) матрица уравнения (2) будет иметь блочно-диагональную структуру с независимыми диагональными блоками, а в векторе-столбце правой части уравнения (2) появятся компоненты, определяющие реакции $X_k = k_p (U_i - U_j)_k$ взаимодействия элементов общего УКЭ. Покажем это на простом примере составной модели стержневого УКЭ следующим уравнением:

$$\begin{bmatrix} (u_1 - u_2)/L_1 & 0 & 0 & 0 \\ -(u_1 - u_2)/L_1 & (u_2 - u_3)L_2 & 0 & 0 \\ 0 & -(u_2 - u_3)L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{u}_3 - u_4)/L_3 & 0 \\ 0 & 0 & -(\bar{u}_3 - u_4)/L_3 & (u_4 - u_5)/L_4 \\ 0 & 0 & 0 & -(u_4 - u_5)/L_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} EF_1 \\ EF_2 \\ EF_3 \\ EF_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ X_3 \\ -X_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

Разрешающая матрица общего уравнения (3) при таком подходе будет также состоять из независимых диагональных блоков. В результате проблема «плохой» матрицы в уравнении (3) устраняется, и решение задачи идентификации сводится к стандартной процедуре решения системы линейных уравнений.

В табл. 5 приведено решение для ранее рассмотренного примера идентификации изгибной жесткости при увеличении звеньев УКЭ до 20 и более.

Таблица 5

N_b	EJ_i									
1	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	10	10	-	-	-	-	-	-	-	-
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
20	10	10	10	10	10	...	10	10	10	10

При использовании данной схемы решения в численном эксперименте в правой части уравнения (2) появляются реакции взаимодействия упругих контрольных элементов в точках сопряжения. Заметим, что в модернизированном уравнении (9) обобщенная реакция X_3 входит дважды: со знаком «плюс» для одного элемента составного УКЭ и со знаком «минус» для сопрягаемого с ним. Однако в случае практического применения этой схемы известны только заданные внешние силы и замеренные с помощью розеток тензодатчиков деформации в определенных точках упругих контрольных элементов, но не реакции X_k в точках сопряжения элементов составной модели УКЭ.

Рассмотрим эту проблему при решении задачи. Для сложной структуры силовой конструкции, например крыла, физическая модель упругого контрольного элемента с тензодатчиками может быть внедрена физически в силовую структуру так, чтобы имела возможность «копировать» деформирование структуры как балки, работающей на изгиб в двух плоскостях, кручение и растяжение-сжатие. На практике реализовать это не всегда возможно и нецелесообразно. Физически эластичный элемент № 1 с тензодатчиками устанавливается, например, на одном лонжероне сверху, физически эластичный элемент № 2 – на лонжероне снизу. Виртуальный УКЭ на рис. 5 обозначен как «УКЭ». Компоненты деформации при растяжении-сжатии, изгибе в двух плоскостях и кручении виртуального УКЭ определяются деформированием физически эластичных элементов № 1, 2. На рис. 5 такой виртуальный УКЭ показан для силовой конструкции экспериментального самолета КАИ-81.

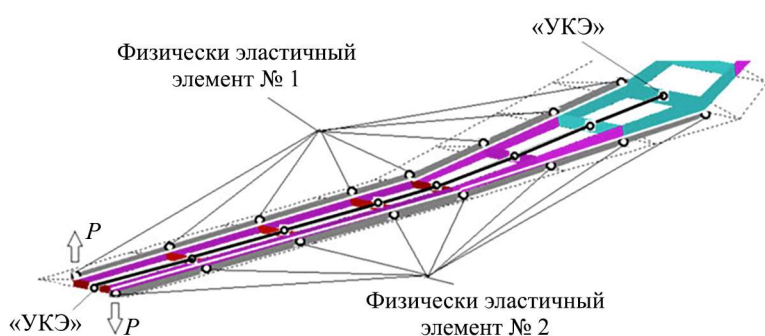


Рис. 5

В этом случае физическая модель УКЭ становится условной, а упругие деформации по размаху виртуального УКЭ вычисляются в соответствии с принятой гипотезой, например, плоских сечений установки розеток тензодатчиков на лонжеронах реальной силовой конструкции.

Проведем численный эксперимент для консольной модели упругого контрольного элемента и модели неразрезной виртуальной УКЭ с шарнирным сопряжением с силовой структурой 1, 2 (рис. 6). Продемонстрируем безразмерные прогибы $\bar{u}_{изг}$, консольной (рис. 6, б, кривая 1) и неразрезной шарнирно

опертой балки (рис. 6, б, кривая 2) при действии поперечной силы P и изгибающего момента (рис. 6, а). На рис. 6, б показаны безразмерные прогибы балок.

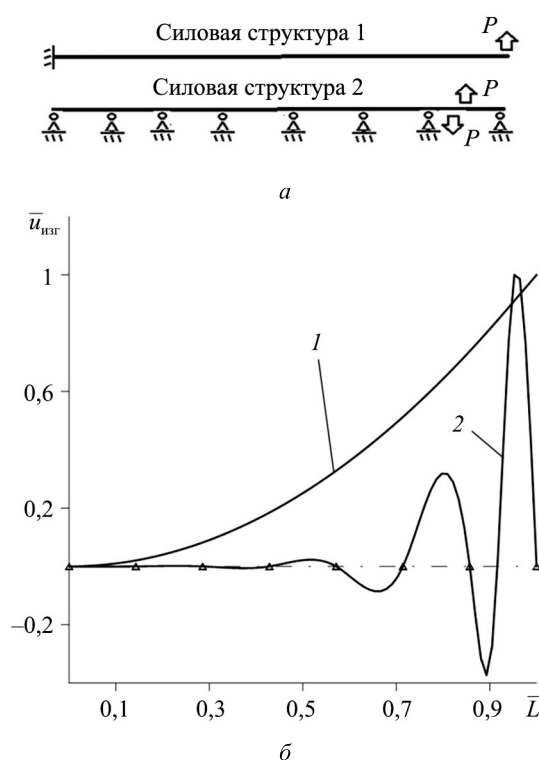


Рис. 6

В численном эксперименте обобщенные реакции в точках стыковки элементов составной модели УКЭ состоят из поперечной реакции-силы X_1 и реакции-момента X_2 . На рис. 7 приведены масштабированные величины $\bar{X}_1$ по размаху силовых структур 1, 2. На рис. 8 показаны аналогичные величины $\bar{X}_2$.

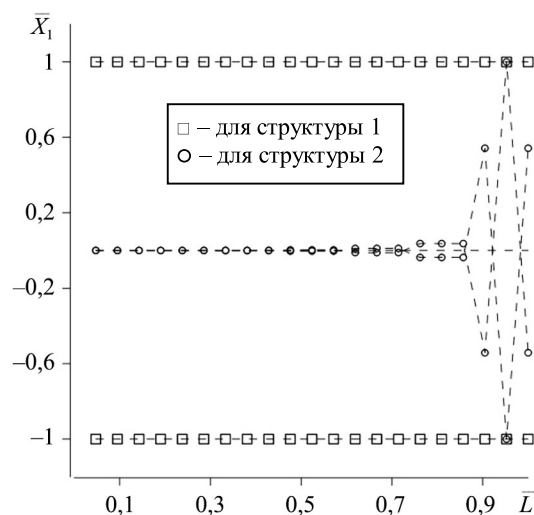


Рис. 7

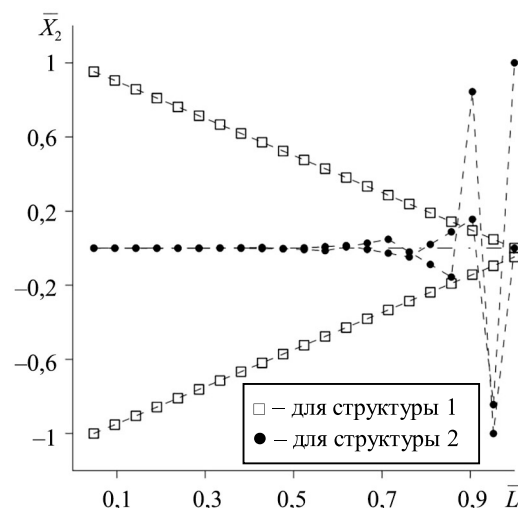


Рис. 8

Проведенные расчеты для различных значений изгибной жесткости X_2 в узлах стыковки составной модели УКЭ не зависят от величины изгибной жесткости элементов составной виртуальной модели УКЭ.

На рис. 9 показаны графики двух вариантов нормированного значения изгибной жесткости $\bar{EJ}$ виртуального УКЭ по размаху $\bar{L}$ при проведении этих численных экспериментов.

При решении задачи идентификации обобщенных жесткостных параметров обобщенные реакции, необходимые при формировании уравнений (2) с использованием виртуального УКЭ как составной конструкции, могут быть определены расчетом. Для этого необходимо знать величину заданной внешней нагрузки при проведении эксперимента в лабораторных или полевых условиях и геометрические размеры УКЭ.

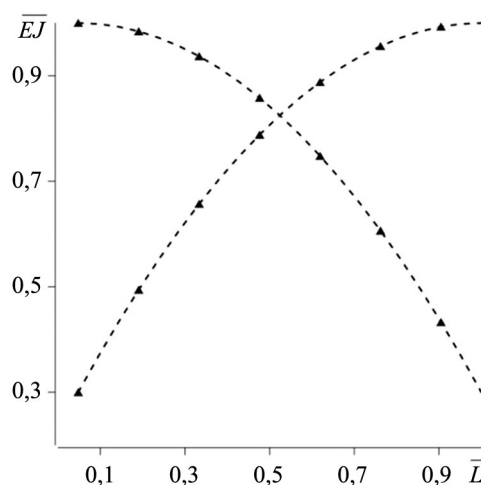


Рис. 9

Рассмотрим схему диагностики жесткости силовой структуры с использованием предлагаемого подхода к решению задачи идентификации обобщенных жесткостных параметров. Для всех основных силовых элементов несущей конструкции формируется база данных, характеризующая влияние элемента силовой структуры на изменение обобщенной жесткости упругого контрольного элемента. Для этого используется упругая модель силовой конструкции, сформированная с использованием пакетов прикладных программ метода конечных элементов и балочной модели для упругого контрольного элемента. Для каждого упругого контрольного элемента формируется база данных, характеризующая влияние элементов силовой конструкции на обобщенные характеристики жесткостных параметров этого элемента, рассчитываемые при проведении диагностики с помощью замеренных деформаций УКЭ. База расчетных данных формируется с использованием упругой модели силовой конструкции и упругой модели УКЭ. При проведении диагностики силовой структуры по полученным значениям компонент деформаций УКЭ производится расчет обобщенных характеристик жесткости, сравнение их с эталонными значениями из базы данных и определение зоны расположения элементов силовой конструкции с отклонениями параметров жесткости от эталонных значений. В примере диагностики силовой структуры крыла (см. рис. 1) в табл. 6 эти значения выделены полужирным шрифтом.

Таблица 6

Номер узлов упругих контрольных элементов	Обобщенные характеристики жесткости							
	$EF \cdot 10^{-8}, \text{ Н}$		$GJ_r \cdot 10^{-4}, \text{ Н} \cdot \text{ м}^2$		$EJ_y \cdot 10^{-4}, \text{ Н} \cdot \text{ м}^2$		$EJ_z \cdot 10^{-4}, \text{ Н} \cdot \text{ м}^2$	
	Эталон	Расчет	Эталон	Расчет	Эталон	Расчет	Эталон	Расчет
9–8	0,685	0,685	9,0	9,0	2,2	2,2	8,8	8,8
8–7	0,625	0,625	8,212	8,212	2,0	1,81	8,03	7,23
7–6	0,565	0,565	7,425	7,425	1,82	1,82	7,26	7,26
6–5	0,505	0,505	6,634	6,634	1,62	1,62	6,49	6,49
5–4	0,445	0,445	5,85	5,85	1,43	1,43	5,72	5,72
4–3	0,385	0,385	5,062	5,062	1,24	1,24	4,95	4,95
3–2	0,325	0,325	4,275	4,275	1,045	1,045	4,18	4,18
2–1	0,255	0,255	3,487	3,487	0,853	0,853	3,41	3,41

Расчетный эксперимент выявил деградацию параметров жесткости изгиба элемента между узлами 8–7 УКЭ. Дополнительное исследование влияния элементов силовой структуры на обобщенные характеристики УКЭ, например изгибной жесткости для данной локальной зоны, позволяет определить конкретный элемент силовой структуры с деградацией упругих свойств.

В табл. 7 приведены расчетные данные относительного изменения обобщенных характеристик жесткости изгиба элементов силовой структуры из сформированной базы данных для элементов между узлами 38–44, 39–45, 41–47, 40–46. На основании сравнения с эталонными значениями из базы данных делается вывод о вероятной деградации параметров изгибной жесткости элемента силовой конструкции между узлами.

Таблица 7

Случаи деградации (обнуления) изгибной жесткости элемента силовой структуры	Относительные значения изменения обобщенных жесткостей УКЭ локальной зоны			
	EF	GJ_r	EJ_y	EJ_z
$\overline{EJ}_{38-44} = 0$	0,9	0,905	0,9	0,9
$\overline{EJ}_{39-45} = 0$	0,8	0,905	0,8	0,9
$\overline{EJ}_{41-47} = 0$	0,7	0,905	0,7	0,9
$\overline{EJ}_{40-46} = 0$	0,6	0,905	0,6	0,9

Примечание: Полужирным шрифтом выделены относительные значения вклада элемента силовой конструкции в локальной зоне между узлами 38–44 в величину изгибной жесткости эталонной конструкции из расчетной базы данных.

Предложенный способ решения задачи идентификации обобщенных жесткостных параметров силовой структуры не приводит к неустойчивости решения задачи и позволяет решить ее наиболее экономичным способом – решением системы линейных уравнений.

Направления дальнейших исследований в этой области включают применение предложенного способа для решения динамических задач диагностики, а также развитие моделей упругого контрольного элемента для решения задач идентификации параметров жесткости сложных силовых структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988. 285 с.
3. Алифанов О.М. и др. Определение температурных зависимостей теплофизических характеристик анизотропных материалов из решения обратной задачи // Вестник МАИ [Электронный журнал]. 2009. № 5. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_13056141_68880898.pdf С. 247–254 (дата обращения: 6.01.2025).
4. Петров Б.Н., Крутько П.Д. Применение теории чувствительности в задачах автоматического управления // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1970. № 2. С. 134–140.
5. Костин В.А., Валитова Н.Л. О коэффициентах уравнений равновесия при решении задачи восстановления диаграмм деформирования слабokonических тонкостенных конструкций // Изв. вузов. Авиационная техника. 2007. № 3. С. 8–11.
6. Костин В.А., Валитова Н.Л. Решение обратной задачи прочности тонкостенных конструкций с использованием алгоритма чувствительности // Изв. вузов. Авиационная техника. 2018. № 1. С. 123–127.
7. Костин В.А., Хуан Ш., Валитова Н.Л. Применение дискретно-континуальной модели расчета на прочность для решения задачи идентификации теплонагруженной конструкции // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 3. С. 3–7.
8. Костин В.А., Валитова Н.Л. Об улучшении сходимости вычислений упругих характеристик конструкции при использовании аппарата функции чувствительности // Изв. вузов. Авиационная техника. 2019. № 4. С. 168–171.

Поступила в редакцию 6.02.25
После доработки 16.06.25
Принята к публикации 16.06.25

On the Method of Solving the Problem of Generalized Rigidity Characteristics Identifying of Extended Load-Bearing Structures Using an Elastic Checking Unit

T.YU. GAINUTDINOVA, V.G. GAINUTDINOV, CHANGQING HU,
R.F. MINGAZOV, N.A. MYSOVSKII, AND L.A. FAZLIEV

Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan

A method for identifying the generalized stiffness parameters of a load-bearing structure is proposed. This method is based on the formation of a general equation for the stiffness parameters using the least-squares method and the general equilibrium equation of an elastic checking element represented by a composite structure consisting of individual elements. The deformation of elastic checking elements is determined by the components of local elastic generalized displacements and generalized reactions at the junction points of the elastic checking elements. The proposed approach does not lead to instability of the identification problem solution and allows solving it in the most economical way. A diagnostic scheme for load-bearing structures using elastic checking elements is considered. This diagnostic scheme can be performed in laboratory and field conditions.

Solution of the identification problem, obtaining a stable solution, composite structure, generalized rigidity characteristics, diagnostics of the load-bearing structure, elastic checking unit