

Нелинейные колебания прямоугольной пластины

Построена математическая модель нелинейных колебаний изотропной прямоугольной пластины. Разработан численный алгоритм без насыщения для решения данной проблемы. В качестве искомых переменных выбраны прогиб и усилия в срединной плоскости пластины. Задача сведена к системе нелинейных обыкновенных уравнений.

С.Д. АЛГАЗИН,
д-р физ.-мат. наук
(ИПМех РАН, Москва)
algazinsd@mail.ru

Уравнения Кармана, нелинейные колебания, прямоугольная пластина, численный алгоритм без насыщения

В работе [1] рассмотрена задача о нелинейных колебаниях прямоугольной пластины. Методом Бубнова – Галеркина задача сведена к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Бубнова – Галеркина характеризуется высокой чувствительностью к выбору базиса. Для достижения приемлемой точности требуется априорный подбор базиса для рассматриваемой задачи. В настоящей работе этот недостаток устраняется.

В качестве искомых переменных выбраны прогиб w и усилия в срединной плоскости пластины N_x , N_y , N_{xy} . Дискретизация основана на интерполяции решения в прямоугольнике $[a, b]$ многочленами. Данная интерполяция характеризуется следующим свойством: ее точность возрастает с увеличением гладкости интерполируемой функции. Поскольку решение внутри прямоугольника является гладким, алгоритм адаптируется к этому свойству. Следует отметить, что априорное знание степени гладкости не требуется – алгоритм самостоятельно настраивается на гладкость решения. Узлы интерполяции выбираются сгущающимися к углам прямоугольника, в которых решение имеет особенности. Идея таких алгоритмов изложена в работе [2].

Далее для получения дискретной задачи к этой интерполяционной формуле применяется бигармонический оператор, т. е. два (четыре) раза по x и y дифференцируется интерполяционная формула. Экспериментально установлено, что если число узлов по x и y меньше пятидесяти, такая дискретизация не вызывает существенного накопления погрешности.

Таким образом, алгоритм сводится к построению интерполяционной формулы, удовлетворяющей заданным краевым условиям.

Основным источником структурной нелинейности является напряжение, возникающее в результате растяжения панели из плоскости. Это растяжение или изменение длины панели является следствием большого изгиба вне плоскости. В простейшем приближении уравнение одномерной пластины имеет вид

$$D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta p = 0, \quad (1)$$

где N_x – усилие, вызванное растяжением. Его можно оценить, учитывая деформацию или относительное изменение длины панели da/a . Из элементарного исчисления геометрии деформированной панели следует

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\int_0^a \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx - a}{a} \approx \frac{1}{2} \frac{\int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx}{a},$$

где вид правой части следует из биномиального разложения, $\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ при $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \ll 1$.

Наклон панели для плоской пластины находится в порядке толщины/длины, а для изогнутой пластины – в порядке высоты подъема/длины. Для первого приближения уклон всегда очень мал, а для второго он обычно значительно меньше единицы. Усилие оценивается как напряжение, умноженное на площадь поперечного сечения (для единичной ширины). Использование закона Гука в работе [2] дает

$$N_x = E \frac{da}{a} h = \frac{Eh}{2a} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2)$$

Подстановка выражения (2) в формулу (1) дает соотношение

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left[\frac{Eh}{2a} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta p = 0. \quad (3)$$

Следовательно, напряжение возрастает с увеличением прогиба и сохраняет положительное значение при любых величинах прогиба. Именно это напряжение обеспечивает возможность существования конечных прогибов пластины даже в тех случаях, когда движение нестабильно в линейной модели. Кроме того, при значительных колебаниях внешнего давления указанное напряжение может существенно ослабить реакцию пластины по сравнению с прогнозами линейной теории, в том числе и при устойчивом характере движения.

При возникновении вопроса, насколько большим должен быть прогиб, прежде чем нелинейное напряжение станет значительным, можно предположить, что это происходит в тот момент, когда линейная и нелинейная компоненты деформации изгиба становятся соизмеримыми.

В предположении что масштаб пространственных производных $\frac{\partial}{\partial x} \sim 1/a$, слагаемое изгиба имеет порядок $Eh^3 \frac{w}{a^4}$, а слагаемое напряженности порядка $Eh \frac{w^3}{a^4}$. Если эти слагаемые имеют одинаковую величину, то $w \sim h$. Для $w \ll h$ слагаемое изгиба больше, чем слагаемое растяжения, а для $w \gg h$ слагаемое изгиба меньше слагаемого растяжения. Можно также утверждать, что перед началом флаттера инерционное, аэродинамическое и жесткостное слагаемые должны иметь сопоставимую величину, и, следовательно, вблизи границы стабильности, но за ее пределами амплитуда предельного цикла флаттера плиты будет порядка толщины пластины h . На основании аналогичных, однако более сложных суждений можно заключить, что для изогнутой пластины амплитуда флаттера будет иметь тот же порядок, что и максимальная высота подъема, достигаемая непосредственно за пределами области устойчивости.

Чтобы оценить влияние структурной нелинейности на устойчивую панель, реагирующую на внешние давления, сравним величину нагрузки Δp^E с величиной членов жесткости. Игнорируя резонансные эффекты, рассмотрим порядок следующих величин. Предположительно

$$\Delta p^E \sim Eh^3 \frac{w}{a^4} \text{ или } \frac{\Delta p^E a^4}{Eh^4} \sim w/h.$$

Если $\frac{\Delta p^E a^4}{Eh^4}$ порядка единицы или больше, нелинейности будут значимыми. Более того, если су-

ществует существенное частотное согласование между потоком и пластиной (резонансные эффекты), то этот параметр может быть настолько малым, что нелинейности все еще могут быть значимыми. Этот параметр также имеет значение в случае статических нагрузок под внешним давлением. Статические нагрузки не вызывают непосредственной динамической реакции, однако при достижении значений, достаточных для перевода конструкции в нелинейный режим жесткости, они могут оказывать существенное косвенное влияние на ее динамическое поведение. Учитывая это, можно начать систематическое об-

суждение нелинейных теорий пластин и оболочек. Математические расчеты станут более сложными, но основные физические понятия останутся, по сути, теми же.

Рассмотрим базовую модель плоской пластины.

Уравнение движения двумерной изотропной плоской пластины может быть записано в форме [1]:

$$D\nabla^4 w = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta p; \quad (4)$$

$$\frac{\nabla^4 F}{Eh} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (5)$$

где F – функция потенциала напряжения Эйри. Результирующие усилия в плоскости (растяжения и сдвиги) получаются из выражений

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

Заметим, что введение F позволяет одинаково удовлетворять уравнениям равновесия в плоскости:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Инерция в плоскости, как обычно, пренебрежимо мала из-за высоких собственных частот (жесткости) движения в плоскости по сравнению с движением из плоскости.

Уравнение (5), по сути, является условием совместимости деформаций, которое вытекает из соотношений между тремя результирующими усилиями в плоскости (N_x , N_y , N_{xy}) и двумя смещениями в плоскости (u , v).

В дополнение к уравнениям равновесия (4) – (7) необходимо также учитывать граничные или опорные условия. Рассмотрим прямоугольную пластину размеров a и b . На определенной границе пластины, например, $x = 0$, классические граничные условия обычно рассматриваются следующим образом:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad N_x = 0; \quad N_y = 0.$$

Для простоты будем считать, что граничные условия в плоскости равны

$$N_x = N_{xy} = 0 \text{ на } x = 0, a;$$

$$N_y = N_{xy} = 0 \text{ на } y = 0, b.$$

Рассмотрим дискретизацию

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

Дискретизация с краевыми условиями защемления приведена в работе [3]. Обозначим H матрицу дискретного бигармонического оператора, тогда в уравнении (4) вместо $\nabla^4 w$ будет использоваться член $H\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ – вектор-столбец, содержащий значения w в узлах сетки. Эти значения зависят от t . Узлы по x и y выбираются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{a}{2} \left(\cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} + 1 \right), \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ y_j &= \frac{b}{2} \left(\cos \frac{(2j-1)\pi}{2m} + 1 \right), \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (8)$$

т. е. получаются линейной заменой из нулей многочлена Чебышева. Из формулы (4) следует

$$D\nabla^4 w = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta p. \quad (9)$$

Распишем дискретные производные. Дифференцирование по x и y рассмотрено в работе [4]. Обозначим $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ матрицы первого и второго численного дифференцирования размера $m \times m$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=x_i, y} &= a^2 \sum_{k=1}^m D_{ik}^{(2)} w(x_k, y); \\ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x, y=y_j} &= b^2 \sum_{l=1}^m D_{jl}^{(2)} w(x, y_l); \\ \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x, y_i} &= a \sum_{v=1}^m D_{iv}^{(1)} w(x, y_v); \\ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right|_{x=x_i, y=y_j} &= a \left(\sum_{\mu=1}^m D_{i\mu}^{(1)} \right) b \left(\sum_{q=1}^m D_{jq}^{(1)} w(x_\mu, y_q) \right); \\ \nabla^4 F &= \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (10)$$

Дифференцирование N_x , N_y , N_{xy} по x и y проведем с помощью формул (10). В общем виде дискретная задача не расписывается ввиду ее громоздкости. Таким образом, задача (4) – (7) сведена к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений.

Источник [1] содержит перечень литературных источников по тематике данного исследования.

В работе [5] исследована линейная динамическая устойчивость статического состояния равновесия с изгибом. В работах [6, 7] рассмотрены герметизированные и/или изогнутые корпуса с использованием аналогичного анализа. В исследованиях [8, 9] начата работа по динамическому нелинейному анализу плоских пластин. Позже данный подход был развит в нескольких направлениях, включая повышение точности за счет использования полной аэродинамики потенциального потока [9] и эффектов кривизны [10, 11]. Некоторые исследователи использовали метод гармонического равновесия для учета временных вариаций, другие численно вычисляли временные истории реакции. В работе [10] применен перспективный метод двухвременных возмущений масштаба.

В работах [8–12] решались нелинейные задачи упругой устойчивости. Исследования по близкой тематике проводились в работах [13–16].

Работа выполнена по теме государственного задания ИПМех РАН № 124012500437-9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dowell E.H.* Aeroelasticity of Plates and Shells. Noordhoff International Publishing, 1975. 139 p.
2. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
3. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы классической матфизики. XLVI. Свободные колебания прямоугольной пластины. М.: ИПМех РАН, 2015 (Препринт ИПМех РАН; № 1105).
4. *Алгазин С.Д., Селиванов И.А.* Численные алгоритмы классической матфизики. LXI. Численное исследование флаттера пластины в сверхзвуковом потоке газа. М.: ИПМех РАН, 2021 (Препринт ИПМех РАН № 1194).
5. *Fralich R.W.* Postbuckling Effects on the Flutter of Simply-Supported Rectangular Panels at Supersonic Speeds: Technical Note D-1615 / NASA. Washington, 1963. 30 p.
6. *Carter L.L., Stearman R.O.* Some Aspects of Cylindrical Shell Panel Rutter // AIAA Journal. 1968. Vol. 6. Iss. 1. P. 37–43.
7. *Barr G.W., Stearman R.O.* Aeroelastic Stability Characteristics of Cylindrical Shells Considering Imperfections and Edge Constraint // AIAA Journal. 1969. Vol. 7. Iss. 5. P. 912–919.

8. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
9. Kobayashi S. Flutter of Simply-Supported Rectangular Panels in Supersonic Flow [Electronical Resource]. URL: <http://id.ndl.go.jp/bib/9249109> (дата обращения: 31.07.25).
10. Kuo C.C., Morino, L., Dugundji J. Perturbation and Harmonic Balance Methods for Nonlinear Panel Hutter // AIAA Journal. 1972. Vol. 10. Iss. 11. P. 1479–1484.
11. Dowell E.H., Voss H.M. Experimental and Theoretical Panel Hutter Studies in the Mach Number Range 1.0 to 5.0 // AIAA Journal. 1965. Vol. 3. Iss. 12. P. 2292–2304.
12. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука. Физматлит, 1972. 432 с.
13. Бакулин В.Н., Конопельчев М.А., Недбай А.Я. Флаттер слоистой цилиндрической консольной оболочки, подкрепленной торцевым шпангоутом // Изв. вузов. Авиационная техника. 2018. № 4. С. 14–19.
14. Бакулин В.Н., Недбай А.Я. Динамическая устойчивость композитной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины при воздействии пульсирующего внешнего давления // Инженерно-физический журнал. 2021. № 2. С. 542–549.
15. Бакулин В.Н., Недбай А.Я., Шепелева И.О. Динамическая устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки кусочно-постоянной толщины при действии внешнего пульсирующего давления // Изв. вузов. Авиационная техника. 2019. № 2. С. 19–25.
16. Бакулин В.Н., Волков Е.Н., Симонов А.И. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки при действии переменного по оси внешнего давления // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 4. С. 28–32.

Поступила в редакцию 31.07.25

После доработки 13.09.25

Принята к публикации 15.09.25

Nonlinear Oscillations of a Rectangular Plate

S.D. ALGAZIN

IPMech RAS, Moscow

A mathematical model of nonlinear oscillations of an isotropic rectangular plate is constructed. A numerical algorithm without saturation was developed to solve this problem. The deflection and forces in the median plane of the plate are chosen as the desired variables. The problem is reduced to a system of nonlinear ordinary equations.

Karman equations, nonlinear oscillations, rectangular plate, numerical algorithm without saturation