

А.Н. ДАНИЛИН,
д-р физ.-мат. наук
(ИПРИМ РАН, Москва;
МАИ, Москва),
Е.А. ДЕНИСОВ,
студент
(МФТИ, Долгопрудный),
Е.С. ОНУЧИН
(МФТИ, Долгопрудный;
ИПРИМ РАН, Москва),
В.А. ФЕЛЬДШТЕЙН,
д-р техн. наук
(ИПРИМ РАН, Москва;
МФТИ, Долгопрудный)
andanilin@yandex.ru

Механическая модель космического лифта. Колебания

Рассмотрен вариант троса равного сопротивления и выведен комплекс безразмерных критериев подобия, связывающих упругие, прочностные, инерционные характеристики материала троса, массы технологической платформы лифта и ее орбиты. В настоящей статье модель расширена для исследования волновых процессов и колебаний. Рассмотрены парциальные продольные и поперечные волны и соответствующие им дисперсионные соотношения. На основе полных уравнений анализируются связанные продольные и поперечные стационарные колебания.

Космический лифт, трос, платформа, гравитация, центробежная сила, натяжение, равное сопротивление, стационарные колебания

Настоящая статья является продолжением статьи [1], где была предложена механическая модель космического лифта и проанализированы особенности статического напряженного состояния конструкции с целью оценить возможные параметры его конструктивной схемы.

Из-за стоимости космических миссий, основную часть которой составляет доставка пассажиров и полезных грузов, существенно задерживается развитие космонавтики. Опубликовано достаточно много работ, где рассматриваются инженерные и экономические аспекты космического лифта, являющегося особым объектом астрономического масштаба. На его работу в космосе влияет не только притяжение Земли и центробежная сила, но и притяжение Солнца и Луны, форма Земли, наличие космического мусора и т. д. К настоящему времени изучены не все особенности функционирования космического лифта. Размеры и недостаточная устойчивость к изгибу и закручиванию требуют детального изучения устойчивости космического лифта как геостационарного спутника, а также на этапе эксплуатации в качестве «стропы». Решение проблемы космического лифта в целом может быть получено с помощью технологии материалов, позволяющей получить материалы с необходимыми свойствами, и механики, благодаря которой можно определить оптимальную конструкцию тросовой системы и обоснованно сформулировать требования к материалам [2–8].

В дальнейшем используются модель [1] и обозначения, приведенные на рис. 1: M_3 – масса Земли; Ω – угловая скорость суточного вращения Земли; r – радиальная координата (расстояние от центра Земли); M – масса орбитальной платформы; r_0 – радиус геостационарной орбиты в плоскости экватора Земли; l – длина троса; $r_2 = r_1 + l$ – радиус орбиты орбитальной платформы; r_1 – радиус Земли. Далее используются следующие обозначения: $S(r)$ – площадь поперечного сечения; $T(r)$ – натяжение троса; $T_s(r)$ – статическая составляющая натяжения $T(r)$. Индексы «1», «0», «2» означают, что соответствующая величина вычислена при $z = z_1, z_0, z_2$ (на поверхности Земли, геостационарной орбите и орбите орбитальной платформы).

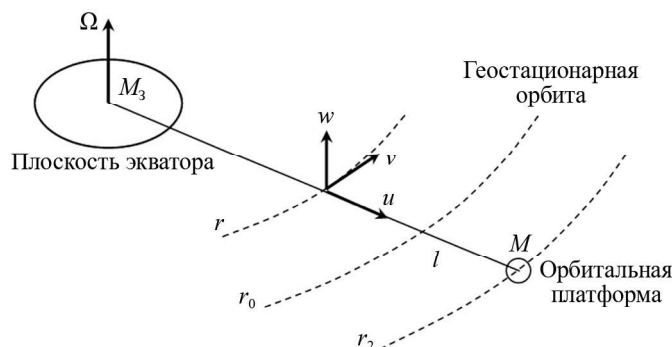


Рис. 1

Лифт находится в сферически симметричном гравитационно-центробежном силовом поле с плотностью потенциала

$$U(r) = -\Omega^2 r_0^2 \left(\frac{r_0}{r} + \frac{r^2}{2r_0^2} \right) = -\Omega^2 r_0^2 f(r).$$

При расчете равновесия трос рассматривается как гибкая тяжелая нить, вытянутая вдоль радиальной координаты; нижняя точка троса закреплена на экваторе Земли.

На единицу длины троса действуют гравитационная и центробежная силы с равнодействующей

$$F = -m \frac{dU}{dr} = m\Omega^2 r_0 \left(\frac{r}{r_0} - \frac{r_0^2}{r^2} \right) = m\Omega^2 r_0 \varphi(r).$$

Далее используются параметры, введенные в работе [1]: $\lambda_a = \Omega r_0 / a_0$ и $\lambda_c = \Omega r_0 / c_0$ – отношение линейной скорости тела на геостационарной орбите (примерно 3000 м/с) к скоростям поперечной $a_0 = \sqrt{\sigma/\rho}$ и продольной упругой волны $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ в материале троса. Скорость поперечных волн a_0 обобщенно характеризует напряженное состояние троса, чем, по сути, обусловлены требования к материалу. Отметим, что параметры λ_c , λ_a связаны соотношением $\lambda_c = \lambda_a \sqrt{\varepsilon}$, где ε – деформация статического удлинения троса. Малые значения ($\lambda_a \ll 1$) соответствуют «высокочастотному» тросу из материала с высокой удельной прочностью, а большие ($\lambda_a \gg 1$) – «низкочастотному» тросу с низкой удельной прочностью. Обычно высокая удельная прочность является фактором весового совершенства материала и конструкции. В данном случае повышение удельной прочности за счет снижения плотности материала важно и по той причине, что все нагрузки на трос являются инерционными или гравитационными, пропорциональными массе. В связи с этим повышение удельной прочности материала не только увеличивает несущую способность, но и одновременно снижает внешние нагрузки. В дальнейшем будем предполагать, что материал троса является высокочастотным и выполняются условия $\lambda_a \ll 1$, $\lambda_c \ll 1$, $\varepsilon = (\lambda_c / \lambda_a)^2 \ll 1$.

Рассматривается трос равного сопротивления, в котором растягивающее напряжение в сечениях постоянно по длине и является проектным параметром, заданным по условиям прочности троса. Погонная масса и натяжение троса пропорциональны площади сечения: $m(r) = \rho S(r)$, $T(r) = \sigma S(r) = \rho S(r) a_0^2$.

Уравнение статического равновесия и граничное условие в верхнем сечении

$$\frac{dS}{dr} + \frac{\Omega^2 r_0}{a_0^2} \varphi(r) S = 0; \quad S_2 = \frac{M}{\rho r_0} \lambda_a^2 \varphi_2. \quad (1)$$

Решение этого уравнения:

$$S = \frac{M}{\rho r_0} \varphi_2 \lambda_a^2 e^{\lambda_a^2 (f_2 - f)}; \quad T_s = M \Omega^2 r_0 \varphi_2 \lambda_a^2 e^{\lambda_a^2 (f_2 - f)}. \quad (2)$$

При расчете колебаний в качестве отсчетной конфигурации принимается статическое состояние растянутого троса, в котором положение точки на оси задается вектором $\mathbf{R}_0 = i\mathbf{r}$ (см. рис. 1). Ось r лежит в плоскости экватора, z – ось вращения Земли. При колебаниях точки оси троса смещаются $\mathbf{U} = i\mathbf{u} + \mathbf{j}\mathbf{v} + \mathbf{k}\mathbf{w}$ из положения равновесия, так что их текущее положение определяется вектором $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{U}$. Компонента u определяет продольные волны, v , w – поперечные волны (тангенциальные и аксиальные). На элемент троса dr действуют центробежная, гравитационная, кориолисова, инерционная и упругая силы, определяемые равенствами

$$d\mathbf{F}_c = mdr \Omega^2 \mathbf{R} = mdr \Omega^2 [\mathbf{i}(r + u) + \mathbf{j}\mathbf{v} + \mathbf{k}\mathbf{w}];$$

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F}_g &= -m dr \Omega^2 r_0^3 \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = -m dr \Omega^2 \frac{r_0^3}{r^3} \left(1 - 3 \frac{u}{r}\right) \mathbf{R} + O(u^2) = \\
&= -m dr \Omega^2 \frac{r_0^3}{r^3} [\mathbf{i}(r - 2u) + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w] + O(u^2, v^2, w^2); \\
d\mathbf{F}_{\text{cor}} &= -2m dr \Omega \mathbf{k} \times (\mathbf{i}\dot{u} + \mathbf{j}\dot{v} + \mathbf{k}\dot{w}) = 2m dr \Omega (\mathbf{i}\dot{v} - \mathbf{j}\dot{u}); \\
d\mathbf{F}_{\text{in}} &= -m dr \ddot{\mathbf{U}}; \\
d\mathbf{F}_e &= \mathbf{F}'_e dr = \left[\mathbf{i}T' + \mathbf{j}(Tv')' + \mathbf{k}(Tw')' \right] dr, \quad T = T_s + ESu'.
\end{aligned}$$

Уравнение колебаний в векторной форме

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} = \Omega^2 \mathbf{R} \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) + 3i\Omega^2 \frac{r_0^3}{r^3} u - 2\Omega \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{\mathbf{F}'_e}{m}. \quad (3)$$

Граничные условия в нижнем сечении троса нулевые, а условие в верхнем сечении представляет собой уравнение движения платформы, которая считается точечной массой, лежащей на оси троса:

$$\frac{d^2 \mathbf{U}_2}{dt^2} = \Omega^2 \mathbf{R}_2 \left(1 - \frac{r_0^3}{r_2^3}\right) + 3i\Omega^2 \frac{r_0^3}{r_2^3} u_2 - 2\Omega \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{R}_2}{dt} - \frac{\mathbf{F}_{\text{cab}}}{M}. \quad (4)$$

Граничное условие (4) аналогично уравнению (3) при замене всех переменных параметров на их значения при $r = r_2$, погонной массы m – на массу орбитальной платформы M , а производной $\mathbf{F}'_e$ – на силу воздействия троса на платформу $\mathbf{F}_{\text{cab}} = (T_{s2} + ES_2 u'_2) \mathbf{i} + T_{s2} v'_2 \mathbf{j} + T_{s2} w'_2 \mathbf{k}$ в направлении к Земле.

Специфика троса равного сопротивления отражена в последних слагаемых уравнений (3), (4). Преобразуем выражения, содержащие S , T_s , используя уравнение статики (1) и формулы для величин a_0 , c_0 , λ_a :

$$\frac{(ESu')'}{m} = c_0^2 \left(u'' - \frac{\lambda_a^2}{r_0} \varphi u' \right); \quad \frac{(T_s v')'}{m} = a_0^2 \left(v'' - \frac{\lambda_a^2}{r_0} \varphi v' \right); \quad \frac{(T_s w')'}{m} = a_0^2 \left(w'' - \frac{\lambda_a^2}{r_0} \varphi w' \right),$$

и перепишем уравнение (3) и граничное условие (4) в компонентах:

$$\begin{aligned}
\ddot{u} &= c_0^2 u'' - \frac{\Omega^2 r_0}{\varepsilon} \varphi(r) u' + \Omega^2 \psi(r) u + 2\Omega \dot{v} + \frac{T'_s}{m} + \Omega^2 r_0 \varphi(r); \\
\ddot{v} &= a_0^2 v'' - \Omega^2 r_0 \varphi(r) v' + \Omega^2 \chi(r) v - 2\Omega \dot{u}; \quad \ddot{w} = a_0^2 w'' - \Omega^2 r_0 \varphi(r) w' + \Omega^2 \chi(r) w,
\end{aligned} \quad (5)$$

где функции

$$\varphi(r) = \frac{r}{r_0} - \frac{r_0^2}{r^2}; \quad \psi(r) = 1 + 2 \frac{r_0^3}{r^3}; \quad \chi(r) = 1 - \frac{r_0^3}{r^3}.$$

При $r = r_1$ $u_1 = v_1 = w_1 = 0$. При $r = r_2$ имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_2 &= \Omega^2 \psi_2 u_2 + 2\Omega \dot{v}_2 - \frac{ES_2 u'_2}{M} + \Omega^2 r_2 \chi_2 - \frac{T_{s2}}{M}; \\
\ddot{v}_2 &= \Omega^2 \chi_2 v_2 - 2\Omega \dot{u}_2 - \frac{T_{s2}}{M} v'_2; \quad \ddot{w}_2 = \Omega^2 \chi_2 w_2 - \frac{T_{s2}}{M} w'_2.
\end{aligned} \quad (6)$$

В силу уравнений статического равновесия последние два слагаемые в уравнениях (5) для $\ddot{u}$ и уравнениях (6) для $\ddot{u}_2$ равны нулю. Продольные и тангенциальные колебания в плоскостях, параллельных экватору, взаимосвязаны, а аксиальные вдоль оси вращения Земли независимы.

Сложность решения задачи обусловлена неоднородностью гравитационно-центробежного силового поля вдоль троса, которая проявляется в переменности коэффициентов в уравнениях. Согласно зависимостям $\varphi(r)$, $\psi(r)$, $\chi(r)$ (рис. 2) переменность коэффициентов наиболее сильно выражена на активной части троса между Землей и геостационарной орбитой, причем два из них меняют знак при переходе через геостационарную орбиту.

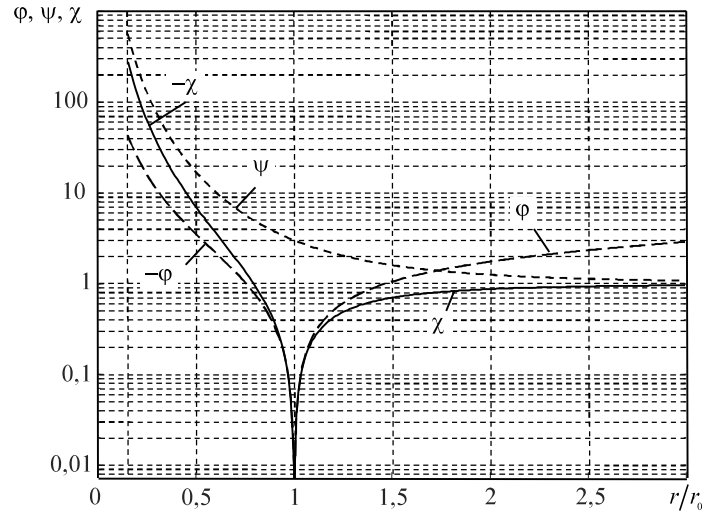


Рис. 2

Рассмотрим качественные особенности волновых процессов в тросе, пренебрегая силами Кориолиса. В этом приближении различные типы колебаний независимы, а уравнение продольных (упругих) колебаний принимает вид

$$\ddot{u} = c_0^2 u'' - \frac{\Omega^2 r_0}{\varepsilon} \varphi(r) u' + \Omega^2 \psi(r) u.$$

С учетом большой длины троса предположим, что волны, возбуждаемые локальными возмущениями, вследствие демпфирования затухают на малом, по сравнению с характерным размером (порядка радиуса геостационарной орбиты), расстоянии, где переменные коэффициенты уравнения почти постоянны и их местные значения могут рассматриваться как параметры. Тогда для бегущих волн вида $u = e^{i(\omega t - qz)}$ имеет место дисперсионное соотношение между частотой ω и волновым числом q : $\omega/\Omega = \sqrt{(qr_0/\lambda_c)^2 - \psi - i\varphi qr_0/\varepsilon}$. Длина бегущей волны очевидно мала по сравнению с радиусом геостационарной орбиты, откуда следует, что $qr_0 \gg 1$, следовательно, $qr_0/\lambda_c \gg 1$. На большей части троса (см. рис. 2) функция $\psi = O(1)$, и для оценок можно принять:

$$\frac{\omega}{\Omega} = \sqrt{\left(\frac{qr_0}{\lambda_c}\right)^2 - i\varphi \frac{qr_0}{\varepsilon}} = \frac{qr_0}{\lambda_c} \sqrt{1 - i\varphi \frac{\lambda_a^2}{qr_0}} \approx \frac{1}{\lambda_c} \left(qr_0 - i\varphi \frac{\lambda_a^2}{2} \right).$$

Следовательно, волна является диспергирующей при $r/r_0 < 1$ (ниже геостационарной орбиты), где $\varphi < 0$, $\text{Im}(\omega) > 0$, и амплитуда волны со временем убывает. При $r/r_0 > 1$ (выше геостационарной орбиты) $\varphi > 0$, $\text{Im}(\omega) < 0$, и амплитуда волны возрастает. В этом случае говорят о неустойчивости системы относительно собственной волны [9].

Для поперечных аксиальных колебаний, описываемых последним уравнением системы (5), дисперсионное соотношение при тех же предположениях имеет вид $\omega/\Omega \approx qr_0/\lambda_a - i\varphi\lambda_a/2$, и выводы о характере волны аналогичны. Следовательно, участок троса, расположенный выше геостационарной орбиты, наиболее значимый с точки зрения характера бегущих волн, возбуждаемых гармоническими источниками возмущений.

Преобразуем уравнения (5), (6) в безразмерные переменные, введя в качестве единиц длины и времени величины r_0 и $1/\Omega$. Введем также безразмерные скорости волн, отнесенные к линейной скорости тела на геостационарной орбите: $c = c_0/\Omega r_0$, $a = a_0/\Omega r_0$. Тогда вместо уравнений (5), (6) имеем:

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= c^2 u'' - \varepsilon^{-1} \varphi u' + \psi u + 2\dot{v}; & \ddot{v} &= a^2 v'' - \varphi v' + \chi v - 2\dot{u}; \\ \ddot{w} &= a^2 w'' - \varphi w' + \chi w;\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\ddot{u}_2 &= -\varepsilon^{-1} \varphi_2 u'_2 + \psi_2 u_2 + 2\dot{v}_2; & \ddot{v}_2 &= -\varphi_2 v'_2 + \chi_2 v_2 - 2\dot{u}_2; \\ \ddot{w}_2 &= -\varphi_2 w'_2 + \chi_2 w_2.\end{aligned}\quad (8)$$

Отделяя время подстановкой $u = U(z) \cos \omega t$, $v = V(z) \sin \omega t$, $w = W(z) \sin \omega t$ ($z = r/r_0$), приходим к уравнениям колебаний в виде

$$c^2 U'' - \varepsilon^{-1} j U' + (\omega^2 + \psi) U + 2\omega V = 0;\quad (9)$$

$$a^2 V'' - \varphi V' + (\omega^2 + \chi) V + 2\omega U = 0;$$

$$a^2 W'' - \varphi W' + (\omega^2 + \chi) W = 0\quad (10)$$

с граничными условиями

$$U_1 = V_1 = W_1 = 0;\quad (11)$$

$$(\omega^2 + \psi_2) U_2 - \varepsilon^{-1} \varphi_2 U'_2 + 2\omega V_2 = 0;\quad (12)$$

$$(\omega^2 + \chi_2) V_2 - \varphi_2 V'_2 - 2\omega U_2 = 0;$$

$$(\omega^2 + \chi_2) W_2 - \varphi_2 W'_2 = 0,\quad (13)$$

где $\varphi_2 = \varphi_2 - 1/z_2^2$; $\psi_2 = 1 + 2/z_2^3$; $\chi_2 = 1 - 1/z_2^3$. Индексами «1», «2» обозначены значения величин при $z = z_1$ и $z = z_2$.

Рассмотрим решение полной системы уравнений, которая распадается на подсистему уравнений (9), описывающих продольные и тангенциальные колебания, взаимосвязанные кориолисовыми силами, и независимое уравнение (10), описывающее аксиальные колебания.

Для решения уравнений первой группы используем метод Галеркина [10–12], принимая в качестве базисных функций собственные функции упрощенных уравнений с постоянными коэффициентами

$$a^2 V'' + \omega^2 V + 2\omega U = 0; \quad c^2 U'' + \omega^2 U + 2\omega V = 0\quad (14)$$

при граничных условиях (11), (12). Решение уравнений (14) ищем в виде $V(z) = A e^{i\lambda(z-z_1)}$, $U(z) = B e^{i\lambda(z-z_1)}$. Подстановка выражений для V и U в уравнения (14) приводит к однородной системе уравнений относительно A и B :

$$(\omega^2 - a^2 \lambda^2) A + 2\omega B = 0; \quad 2\omega A + (\omega^2 - c^2 \lambda^2) B = 0.\quad (15)$$

Условие нетривиальности решения системы (15) приводит к уравнению для определения квадратов волновых чисел $\lambda^4 - \lambda^2 (1 + \varepsilon) \omega^2 / a^2 + \varepsilon \omega^2 (\omega^2 - 4) / a^4 = 0$. С учетом сильного неравенства $c^2 \gg a^2$ волновые числа записываются в виде

$$\lambda_{1,2} = \pm \kappa_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm \kappa_2; \quad \kappa_1 = \omega/a; \quad \kappa_2 = \sqrt{\omega^2 - 4}/c.\quad (16)$$

В дальнейшем рассматривается случай, когда $\omega \gg 2$. Тогда считаем $\kappa_2 = \omega/c$.

Из системы (15) следует связь между амплитудами A и B . Используя, например, второе уравнение, имеем:

$$B_k = \frac{2\omega}{\lambda_k^2 c^2 - \omega^2} A_k = \sigma_k A_k, \quad (17)$$

где σ_k – коэффициенты распределения амплитуд. С учетом выражений (16)

$$\sigma_{1,2} = \delta_1 = 2\varepsilon/\omega; \quad \sigma_{3,4} = \delta_2 = -\omega/2. \quad (18)$$

Общее решение системы уравнений (14), удовлетворяющее граничным условиям (11), запишем с учетом формул (17), (18) в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} V(z) &= A_1 \sin \kappa_1 (z - z_1) + A_2 \sin \kappa_2 (z - z_1); \\ U(z) &= A_1 \delta_1 \sin \kappa_1 (z - z_1) + A_2 \delta_2 \sin \kappa_2 (z - z_1). \end{aligned} \quad (19)$$

Граничные условия (13) приводят к системе однородных уравнений для определения A_1, A_2 :

$$\begin{aligned} (a_{11} \sin \tilde{\kappa}_1 + b_{11} \cos \tilde{\kappa}_1) A_1 + (a_{12} \sin \tilde{\kappa}_2 + b_{12} \cos \tilde{\kappa}_2) A_2 &= 0; \\ (a_{21} \sin \tilde{\kappa}_1 + b_{21} \cos \tilde{\kappa}_1) A_1 + (a_{22} \sin \tilde{\kappa}_2 + b_{22} \cos \tilde{\kappa}_2) A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1 &= \kappa_1 (z_2 - z_1); \quad \tilde{\kappa}_2 = \kappa_2 (z_2 - z_1); \\ a_{11} &= \omega^2 + \chi_2 + 2\omega\delta_1; \quad a_{12} = \omega^2 + \chi_2 + 2\omega\delta_2; \\ a_{21} &= (\omega^2 + \psi_2)\delta_1 + 2\omega; \quad a_{22} = (\omega^2 + \psi_2)\delta_2 + 2\omega; \\ b_{11} &= -\varphi_2 \kappa_1; \quad b_{12} = -\varphi_2 \kappa_2; \quad b_{21} = -\varepsilon^{-1} \varphi_2 \delta_1 \kappa_1; \quad b_{22} = -\varepsilon^{-1} \varphi_2 \delta_2 \kappa_2. \end{aligned}$$

Условие нетривиальности решения системы (20) дает частотное уравнение

$$C_1 \sin \tilde{\kappa}_1 \sin \tilde{\kappa}_2 + C_2 \sin \tilde{\kappa}_1 \cos \tilde{\kappa}_2 + C_3 \cos \tilde{\kappa}_1 \sin \tilde{\kappa}_2 + C_4 \cos \tilde{\kappa}_1 \cos \tilde{\kappa}_2 = 0 \quad (21)$$

с коэффициентами $C_1 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$; $C_2 = a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12}$; $C_3 = b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12}$; $C_4 = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$. Корни уравнения (21) представляют собой частоты собственных колебаний по базисным формам (19).

Результаты вычислений представлены в табл. 1, где в столбцах со значениями k и ω_k даны порядковые номера и значения базисных частот. Расчеты выполнялись при $z_1 = 6371/42000$; $z_2 = 2$; $\varepsilon = 0,1$; $\lambda_a = 0,1$.

Таблица 1

k	ω_k	m	m^a	ω_m^a	n	n^c	ω_n^c
1	3,46	-	-	-	-	-	-
2	17,05	1	1,0033	17,00	-	-	-
3	34,02	2	2,0016	34,00	-	-	-
4	51,01	3	3,0011	51,00	-	-	-
5	53,96	-	-	-	1	1,0040	53,75
6	68,00	4	4,0008	68,00	-	-	-
7	85,00	5	5,0007	85,00	-	-	-
8	102,00	6	6,0005	101,98			
9	107,61	-	-	-	2	2,0020	107,50
10	119,00	7	7,0005	118,98	-	-	-
11	135,98	8	8,0004	135,98	-	-	-
12	152,98	9	9,0004	152,97	-	-	-
13	161,32	-	-	-	3	3,0013	161,25
14	169,98	10	10,0003	169,97	-	-	-

k	ω_k	m	m^a	ω_m^a	n	n^c	ω_n^c
15	186,97	11	11,0003	186,97	-	-	-
16	203,97	12	12,0003	203,97	-	-	-
17	215,05	-	-	-	4	4,0010	215,00
18	220,97	13	13,0003	220,96	-	-	-
19	237,96	14	14,0002	237,96	-	-	-
20	254,96	15	15,0002	254,96	-	-	-
21	268,79	-	-	-	5	5,0008	268,75
22	271,96	16	16,0002	271,95	-	-	-
23	288,95	17	17,0002	288,95	-	-	-
24	305,95	18	18,0002	305,95	-	-	-
25	322,53	-	-	-	6	6,0007	322,50
26	322,95	19	19,0002	322,95	-	-	-
27	339,95	20	20,0002	339,94	-	-	-
28	356,94	21	21,0002	356,94	-	-	-
29	373,94	22	22,0001	373,94	-	-	-
30	376,28	-	-	-	7	7,0006	376,25

Примечание: Частоты, выбранные в качестве базисных, выделены полужирным шрифтом.

Полученные собственные частоты сравнивались со значениями струнных частот $\omega_m^a = \pi m a / (z_2 - z_1)$, $\omega_n^c = \pi n c / (z_2 - z_1)$ ($m, n = 1, 2, \dots$), которые следуют из решения уравнений (15) с отброшенными последними слагаемыми. Результаты вычислений представлены в столбцах со значениями m , ω_m^a и в столбцах со значениями n и ω_n^c .

Аналогично формам записи выражений для ω_m^a и ω_n^c представим значения ω_k в виде $\omega_m^a = \pi m^a a / (z_2 - z_1)$ для всех строк со значениями ω_m^a или в виде $\omega_n^c = \pi n^c c / (z_2 - z_1)$ для всех строк со значениями ω_n^c . Результаты вычислений показаны в столбцах табл. 1 со значениями m^a и n^c . Как видим (см. табл. 1), базисные и струнные частоты очень близки по соответствующим значениям, а порядковые номера m и n практически совпадают со значениями m^a и n^c . Также выявлена пропорциональность частот ω_k частоте ω_2 для всех строк, кроме первой и строк, содержащих значения ω_n^c .

В дальнейшем для обеспечения хорошей обусловленности матриц из спектра базовых частот исключим те, которые отвечают строкам со значениями ω_n^c . Для этих частот при заданном значении $\varepsilon = 0,1$ отношение $c/a = 1/\sqrt{\varepsilon} \approx \pi$ и $\omega_n^c \approx \pi n \omega_1^a$.

Константы интегрирования A_1 , A_2 определяются для каждого значения ω_k из системы однородных уравнений (21). Отбрасывая, например, второе уравнение, находим $A_2 = -A_1 c_{11}/c_{12}$, где $c_{1i} = a_{1i} \sin \tilde{\kappa}_i + b_{1i} \cos \tilde{\kappa}_i$ ($i = 1, 2$).

Для нормировки потребуем, чтобы $A_1^2 + A_2^2 = 1$. В результате для каждого значения собственной частоты получаем:

$$A_1 = c_{12} / \sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2};$$

$$A_2 = -c_{11} / \sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2}.$$

Приведем базисные формы тангенциальных (рис. 3, а) и продольных (рис. 3, б) колебаний для первых четырех собственных частот.

Согласно методу Галеркина приближенное решение краевой задачи для уравнений (9) с граничными условиями (12), (13) будем искать в виде

$$V(z) = \sum_k a_k \tilde{V}_k(z); U(z) = \sum_k b_k \tilde{U}_k(z), \quad (22)$$

где $\tilde{V}_k, \tilde{U}_k$ даются формулами (20) для каждой частоты ω_k . Коэффициенты a_k, b_k подлежат определению. В дальнейшем удобно использовать матричную форму решения. Для этого введем вектор-столбцы

$$\tilde{V} = (\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_K)^T; \quad \tilde{U} = (\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_K)^T; \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)^T; \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_K)^T,$$

позволяющие представить разложения (22) и уравнения (9) в виде скалярных произведений

$$V = \tilde{V}^T \mathbf{a}, \quad U = \tilde{U}^T \mathbf{b}; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \left[(\omega^2 + \chi) \tilde{V}^T - \varphi \tilde{V}^{*T} + a^2 \tilde{V}^{*T} \right] \mathbf{a} + 2\omega \tilde{U}^T \mathbf{b} = 0; \\ & 2\omega \tilde{V}^T \mathbf{a} + \left[(\omega^2 + \psi) \tilde{U}^T - \varepsilon^{-1} \varphi \tilde{U}^{*T} + c^2 \tilde{U}^{*T} \right] \mathbf{b} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

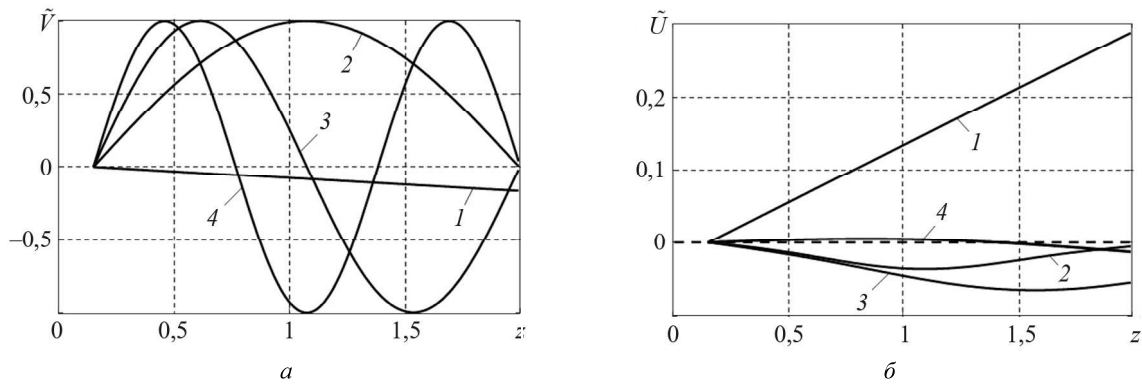


Рис. 3

Умножая слева первое уравнение (24) на $\tilde{V}$, второе – на $\tilde{U}$ и интегрируя по переменной z , приходим к системе уравнений относительно коэффициентов разложений (22). В матричной форме результат этих действий записывается в виде однородной системы уравнений относительно компонент $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$M \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = 0; \quad M = \|m_{ij}\| = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где матричные блоки размерности $K \times K$:

$$\begin{aligned} A &= (\omega^2 + \chi) \langle \tilde{V} \tilde{V}^T \rangle - \varphi \langle \tilde{V} \tilde{V}^{*T} \rangle + a^2 \langle \tilde{V} \tilde{V}^{*T} \rangle; \quad B = 2\omega \langle \tilde{V} \tilde{U}^T \rangle; \\ D &= (\omega^2 + \psi) \langle \tilde{U} \tilde{U}^T \rangle - \varepsilon^{-1} \varphi \langle \tilde{U} \tilde{U}^{*T} \rangle + c^2 \langle \tilde{U} \tilde{U}^{*T} \rangle, \end{aligned}$$

и использовано обозначение $\langle fg \rangle = \int_{z_1}^{z_2} fg dz$.

Условие нетривиальности решения системы уравнений (25) дает частотное уравнение для первой группы взаимосвязанных колебаний $\det M = 0$.

В табл. 2 приведены значения собственных частот задачи в зависимости от числа слагаемых K в разложении Галеркина (22).

Таблица 2

№ п/п	K							Парциальные частоты	
	8	9	10	11	12	13	14	ω_k^A	ω_k^D
1	17,02	17,09	17,02	17,09	17,02	17,09	17,02	17,03	-
2	34,04	34,01	34,04	34,01	34,04	34,01	34,04	34,04	-
3	51,00	51,02	51,00	51,02	51,00	51,02	51,00	51,00	-

№ п/п	K							Парциальные частоты	
	8	9	10	11	12	13	14	ω_k^A	ω_k^D
4	68,06	68,00	68,02	68,00	68,02	68,00	68,02	68,02	-
5	69,48	85,01	85,00	85,01	85,00	85,01	85,00	85,00	-
6	85,00	102,00	102,00	102,00	102,00	102,00	102,00	102,00	-
7	102,02	119,00	119,00	119,00	119,00	119,00	119,00	119,00	-
8	102,80	135,93	135,94	135,93	135,92	135,94	135,93	135,96	-
9	119,00	222,77	153,00	153,00	153,00	153,00	153,00	153,00	-
10	162,38	264,91	222,64	170,00	170,00	170,00	170,00	170,00	-
11	204,70	-	264,17	221,61	187,12	203,97	187,20	187,15	-
12	265,80	-	485,29	264,44	202,72	212,16	200,49	-	200,54
13	331,03	-	-	486,04	264,14	261,08	203,97	203,97	-
14	-	-	-	531,45	316,95	317,84	220,97	220,97	-
15	-	-	-	-	393,90	393,63	265,07	-	265,06
16	-	-	-	-	484,80	484,93	313,95	-	313,97
17	-	-	-	-	537,15	537,02	394,16	-	394,18
18	-	-	-	-	-	-	485,11	-	485,11
19	-	-	-	-	-	-	526,27	-	526,41
20	-	-	-	-	-	-	537,41	-	537,30

Примечание: Область устойчивых значений отделена ломаной линией.

Рассмотрим практический вопрос, насколько существенна связность различных типов волн и насколько близки собственные частоты связанных и парциальных колебаний, которые представляют собой частоты продольных и тангенциальных колебаний без влияния силы Кориолиса. В табл. 2 показаны парциальные частоты ω_k^A и ω_k^D при $K=14$, являющиеся корнями уравнений $\det A = 0$ и $\det D = 0$. Эти значения практически совпадают с соответствующими значениями частот связанных колебаний. Таким образом, влияние связности колебаний, обусловленной силами Кориолиса, на собственные частоты пренебрежимо мало.

На рис. 4, а показано распределение частот собственных колебаний троса в зависимости от K . Рис. 4, б демонстрирует распределение частот по группам, соответствующим низкочастотным тангенциальным и высокочастотным продольным колебаниям.

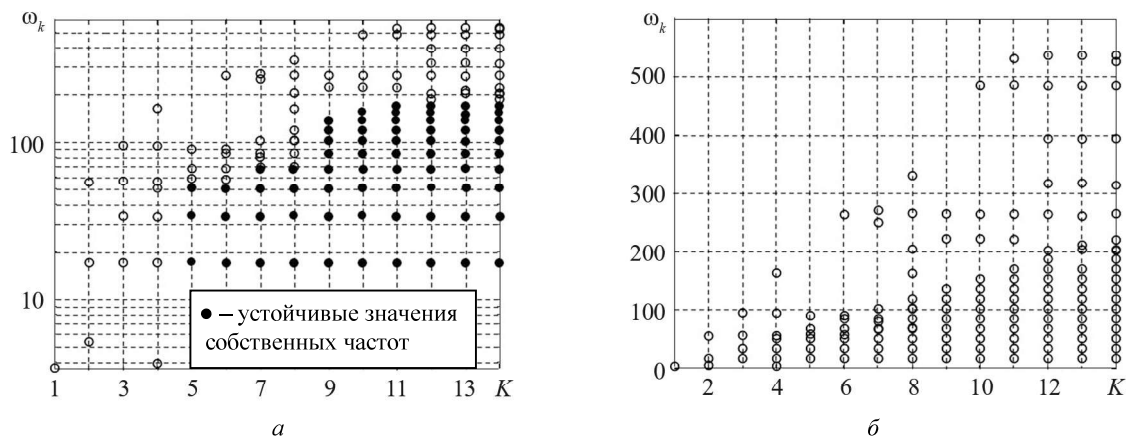


Рис. 4

Формы собственных колебаний определяются из однородной системы уравнений (25) в виде

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1,2K} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{2K,1} & \cdots & m_{2K,2K} \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0, \quad (26)$$

где m_{ij} – элементы матрицы M , $\mathbf{x}^T = (\mathbf{a}^T \mathbf{b}^T)$.

Отбросим первое уравнение системы и введем обозначения

$$\tilde{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} m_{21} \\ \vdots \\ m_{2K,1} \end{pmatrix}; \tilde{M} = \begin{pmatrix} m_{22} & \cdots & m_{2,2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{2K,2} & \cdots & m_{2K,2K} \end{pmatrix}; \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{2K} \end{pmatrix},$$

что позволяет переписать уравнение (26) в виде $\tilde{M}\tilde{\mathbf{x}} = -x_1\tilde{\mathbf{m}}$. Отсюда следует $\tilde{\mathbf{x}} = -x_1\mathbf{y}$, где $\mathbf{y} = \tilde{M}^{-1}\tilde{\mathbf{m}}$; $\mathbf{x}^T = x_1(1 - \mathbf{y}^T)$.

Нормируем так, чтобы $\mathbf{x}^T\mathbf{x} = x_1^2(1 + \mathbf{y}^T\mathbf{y}) = 1$, откуда находим коэффициент нормировки $x_1 = 1/\sqrt{1 + \mathbf{y}^T\mathbf{y}}$ и искомый вектор

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{y}^T\mathbf{y}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix}.$$

Формы колебаний вычисляются по формулам

$$V(z) = \tilde{V}^T(z)\mathbf{a}; U(z) = \tilde{U}^T(z)\mathbf{b},$$

где $\mathbf{a}^T = (x_1, \dots, x_K)$, $\mathbf{b}^T = (x_{K+1}, \dots, x_{2K})$, а элементы векторов $\tilde{V}$, $\tilde{U}$ даются формулами (20). Приведем первые пять собственных форм тангенциальных (рис. 5, а) и продольных (рис. 5, б) колебаний.

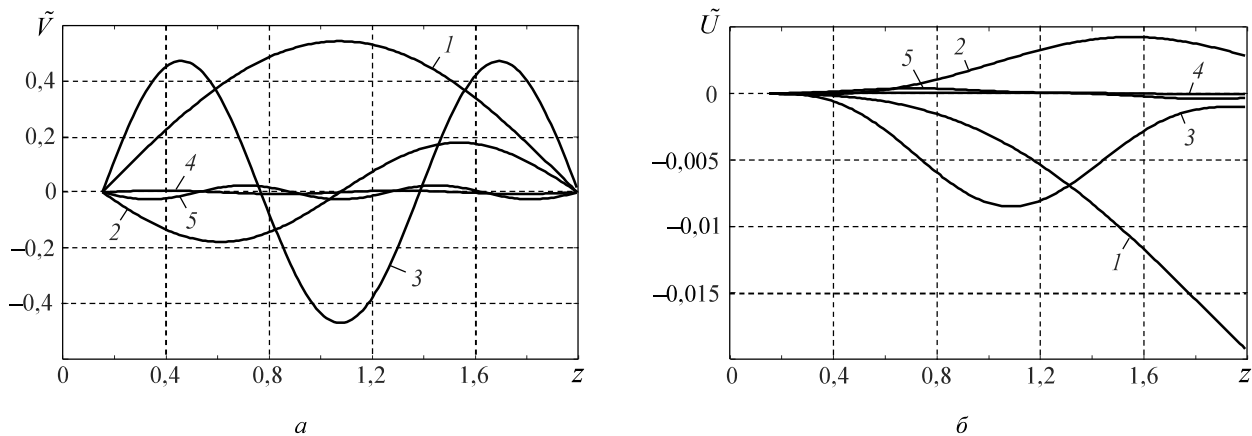


Рис. 5

Собственные частоты и формы аксиальных колебаний определяются аналогично из решения уравнения (10) с граничными условиями (12), (14).

Таким образом, рассмотрены различные аспекты волновых процессов и стационарных колебаний космического лифта, состоящего из технологической платформы и троса равного сопротивления [1], удерживающего ее на орбите, расположенной выше геостационарной орбиты.

Получена система уравнений, описывающая связанные продольные и поперечные (касательные и аксиальные) колебания относительно стационарного состояния, при котором трос, закрепленный на экваторе, вытянут вдоль радиальной оси, исходящей из центра Земли. Технологическая платформа моделируется точечной массой, расположенной на оси троса, который рассматривается как тяжелая гибкая растяжимая нить.

Вследствие пропорциональности местного натяжения и площади сечения троса равного сопротивления особенностью является постоянство фазовых скоростей не только упругих продольных, но и поперечных колебаний. Продольные волны независимы, а поперечные взаимосвязаны вследствие влияния сил Кориолиса.

Одной из задач исследования являлась оценка эффекта взаимосвязи волн различного типа. В связи с этим из основной системы уравнений выделена «укороченная» система, пренебрегающая переменностью гравитационно-центробежного силового поля с сохранением реальных граничных условий и описывающая перечисленные типы колебаний как парциальные. Собственные функции «парциальных» уравнений использованы далее в качестве базисных функций при применении к полной системе процедуры Галеркина.

Показано, что влиянием сил Кориолиса при решении модальных задач допустимо пренебречь и рассматривать продольные и два типа поперечных колебаний как независимые. В собственных модах преобладает компонента, парциальная частота которой близка к общей частоте. В связи с этим можно сделать вывод о преимущественно продольных, тангенциальных и аксиальных колебаниях. Несмотря на неоднородность силового поля, формы колебаний практически близки к классическим «струнным».

В совокупности полученные аналитические решения и следующие из них выводы проясняют качественную картину колебаний троса. В дальнейшем это будет учтено и использовано при разработке более детальной модели (цифрового прототипа) космического лифта, основанной на сочетании аналитических и численных методов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-19-00678.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилин А.Н. и др. Механическая модель космического лифта. Статика // Изв. вузов. Авиационная техника. 2023. № 3. С. 19–27.
2. Artukovic R. The Space Elevator. Physical Principles [Electronical Resource]. URL: www.zadar.net/space-elevator (дата обращения: 2.06.2024).
3. Edwards B.C. Design and Deployment of a Space Elevator // Acta Astronautica. 2000. Vol. 47. Iss. 10. P. 735–744.
4. Space Elevators: An Advanced Earth–Space Infrastructure for the New Millenium [Electronical Resource]. URL: www.images.spaceref.com/docs/spaceelevator/elevator.pdf (дата обращения: 2.06.2024).
5. Bakulin V.N. et al. Quantum-Chemical Simulation for Production Technologies of High-Strength Zylon Fibers // Proc. of the 2nd International Conference on High-Speed Transport Development. 2023. Vol. 446. Article № 03004.
6. Хабриев И.Ш. и др. Получение композиционного материала из термодинамически несовместимых полимеров – поликарбоната и полиэтилентерефталата – в процессе диспергирования по методу SEDS // Изв. вузов. Авиационная техника. 2023. № 4. Р. 125–131.
7. Попов И.А., Гортышов Ю.Ф., Попов И.А. Теплопроводность новых углеродных полимерных композитных материалов // Изв. вузов. Авиационная техника. 2023. № 3. С. 146–149.
8. Бабук В.А., Будный Н.Л., Нарыжный С.Ю. Двигатели транспортных космических систем на основе пастообразных топлив для решения задач межорбитальной транспортировки // Изв. вузов. Авиационная техника. 2023. № 1. С. 82–88.
9. Трубецков Д.И., Рожнов А.Г. Лекции по теории колебаний и волн [Электронный ресурс]. URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/531.pdf (дата обращения: 2.06.2024).
10. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М. – Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
11. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
12. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

Поступила в редакцию 2.07.24

После доработки 9.07.24

Принята к публикации 15.07.24

Mechanical Model of a Space Elevator. Oscillations

A.N. DANILIN^{1,2}, E.A. DENISOV³, E.S. ONUCHIN^{3,1}, AND V.A. FEL'DSHTEIN^{1,3}

¹ IAM RAS, Moscow

² Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow

³ MIPT, Dolgoprudny

The paper considers a variant of equal-strength cable and derives a set of dimensionless similarity criteria that connects the elastic, strength, and inertial characteristics of the cable

material, the mass of the elevator technological platform and its orbit. In this paper, the model is extended to study wave processes and oscillations. Partial longitudinal and transverse waves and the corresponding dispersion relations are considered. Coupled longitudinal and transverse stationary oscillations are analyzed based on the complete equations.

Space elevator, cable, platform, gravity, centrifugal force, tension, equal strength, stationary oscillations