

Стабилизация орбитальной ориентации космического аппарата при измерении только угловых скоростей крена и тангажа или рысканья и тангажа

Построены стабилизирующие законы управления орбитальной ориентацией космического аппарата при наличии измерений только угловых скоростей крена и тангажа или рысканья и тангажа. Законы получены с помощью аналитического синтеза управления по выходу. Регуляторы по выходу рассчитаны на основе множества регуляторов по состоянию через матричное уравнение связи. Заданный спектр блочной матрицы замкнутой системы управления обеспечен с помощью преобразования подобия в виде транспонирования блоков, что позволило от управления по выходу системой с двумя входами перейти к управлению по состоянию системой с одним входом. Приведены условия, при которых регуляторы по выходу существуют и являются стабилизирующими. Конкретные значения настроечных констант минимизируют длительность переходного процесса при ограничениях на углы и угловые скорости, вызванных линеаризацией. Применимость подхода подтверждается примерами численного моделирования.

Н.Е. ЗУБОВ,
д-р техн. наук,
А.В. ЛАПИН,
канд. техн. наук,
В.Н. РЯБЧЕНКО,
д-р техн. наук
(МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Москва)
nik.zubov@gmail.com

Гравитационный момент, декомпозиционный метод, орбитальная ориентация, преобразование подобия, управление по выходу

Управление орбитальной ориентацией космических аппаратов [1] представляет собой важную научно-техническую задачу. Несмотря на значительное количество исследований [1–4], ряд проблем, возникающих при построении и поддержании орбитальной ориентации, остается нерешенным. Одним из актуальных направлений является разработка методов управления при отсутствии или отказе отдельных датчиков, измеряющих компоненты вектора состояния системы [5, 6]. Возможны различные подходы к применению датчиковой аппаратуры. Так, при отсутствии звездных датчиков [7] управление осуществляется автономно [8] – по измерениям двух углов (крена и тангажа) инфракрасной вертикалью и трех компонент вектора угловой скорости датчиком угловых скоростей. Известно, что взаимосвязанное движение в каналах крена и рысканья может рассматриваться отдельно от движения в канале тангажа ввиду слабой связи канала тангажа с каналами крена и рысканья [9, 10]. При отсутствии или поломке инфракрасной вертикали и отказе одного из измерительных каналов датчика угловых скоростей возникает новая научно-техническая задача – стабилизация орбитальной ориентации космического аппарата по измерениям только компонент вектора угловой скорости в двух каналах (крена и тангажа или рысканья и тангажа). Возможное решение этой задачи приведено в данной статье.

Рассматривается линеаризованная модель [10] углового движения космического аппарата на круговой околоземной орбите под действием гравитационного [11] и управляющего моментов. Предполагается, что в результате возможных отказов измерительной аппаратуры доступны только измерения угловых скоростей в каналах крена и тангажа или рысканья и тангажа. Тем не менее по имеющимся измерениям требуется стабилизировать полную трехосную орбитальную ориентацию космического аппарата (три угла и три угловые скорости).

При использовании линеаризованной модели канал тангажа не связан с каналами крена и рысканья. Автономная модель углового движения космического аппарата в канале тангажа [1] в непрерывном времени $t \in \mathbb{R}$ при измерении только угловой скорости тангажа описывается следующими уравнениями состояния и наблюдения:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\vartheta}(t) \\ \ddot{\vartheta}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}_z(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{6,5} & 0 \end{bmatrix}}_{A_z} \underbrace{\begin{bmatrix} \vartheta(t) \\ \dot{\vartheta}(t) \end{bmatrix}}_{x_z(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_z \end{bmatrix}}_{b_z} u_z(t); \quad (1)$$

$$\underbrace{\dot{\vartheta}(t)}_{y_z(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{c_z^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \vartheta(t) \\ \dot{\vartheta}(t) \end{bmatrix}}_{x_z(t)}, \quad (2)$$

где ϑ – угол тангажа; $\dot{\vartheta}$ – угловая скорость тангажа; $a_{6,5} = -3v^2\kappa_z$; $\kappa_z = (J_x - J_y)/J_z$ – коэффициенты линеаризации; v – орбитальная угловая скорость космического аппарата; J_x, J_y, J_z – осевые моменты инерции космического аппарата; $x_z(t), u_z(t), y_z(t)$ – векторы состояния, управления и наблюдения (векторы управления и наблюдения в данном случае скалярные); A_z, b_z, c_z^T – матрицы состояния, управления и наблюдения (матрица управления представляет собой вектор-столбец, а матрица наблюдения – вектор-строку).

В работе [11] показано, что для модели (1), (2) закон управления по выходу

$$u_z(t) = -f_z y_z(t) \quad (3)$$

с матрицей регулятора (в данном случае скалярной)

$$f_z = J_z q_1^* \quad (4)$$

при условиях

$$J_x > J_y; \quad (5)$$

$$q_1^* > 0$$

является стабилизирующим и обеспечивает матрицу замкнутой системы управления $A_z^* = A_z - b_z f_z c_z^T$ желаемый характеристический полином

$$q^*(\lambda) = \lambda^2 + q_1^* \lambda + q_2^*,$$

где $q_2^* = -a_{6,5}$. Матрица замкнутой системы управления (1) – (4) в канале тангажа принимает следующий вид:

$$A_z^*(q_1^*) = A_z - b_z f_z (q_1^*) c_z^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{6,5} & -q_1^* \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Таким образом, исследование сводится к поиску решения для взаимосвязанных каналов крена и рысканья при измерении только угловой скорости крена или только угловой скорости рысканья.

Уравнение состояния для линеаризованной модели углового движения космического аппарата во взаимосвязанных каналах крена и рысканья имеет вид [10]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & a_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma(t) \\ \dot{\gamma}(t) \\ \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/J_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/J_y \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{bmatrix}}_{u(t)}, \quad (7)$$

где γ, ψ – углы крена и рысканья; $\dot{\gamma}, \dot{\psi}$ – угловые скорости крена и рысканья; $a_{2,1} = -4v^2\kappa_x$, $a_{2,4} = -v(1 - \kappa_x)$, $\kappa_x = (J_z - J_y)/J_x$; $a_{4,2} = v(1 - \kappa_y)$, $a_{4,3} = -v^2\kappa_y$, $\kappa_y = (J_z - J_x)/J_y$ – коэффициенты линеаризации; $x(t), u(t)$ – векторы состояния и управления; A, B – матрицы состояния и управления.

Уравнение наблюдения записывается в виде

$$\underbrace{\dot{y}_{\dot{\gamma}}(t)}_{y_{\dot{\gamma}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & | & 1 & | & 0 & | & 0 \end{bmatrix}}_{c_{\dot{\gamma}}^T} x(t) \quad (8)$$

в случае измерения только угловой скорости крена или

$$\underbrace{\dot{y}_{\dot{\psi}}(t)}_{y_{\dot{\psi}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{bmatrix}}_{c_{\dot{\psi}}^T} x(t) \quad (9)$$

в случае измерения только угловой скорости рысканья. Здесь соответственно случаям измерения только угловой скорости крена или рысканья использованы следующие обозначения: $y_{\dot{\gamma}}(t)$, $y_{\dot{\psi}}(t)$ – векторы наблюдения (в данном случае скалярные); $c_{\dot{\gamma}}^T$, $c_{\dot{\psi}}^T$ – матрицы наблюдения (в данном случае векторы-строки).

Требуется построить стабилизирующие законы управления по выходу

$$u(t) = -f_{\dot{\gamma}} y_{\dot{\gamma}}(t); \quad (10)$$

$$u(t) = -f_{\dot{\psi}} y_{\dot{\psi}}(t) \quad (11)$$

соответственно с матрицами регуляторов (в данном случае вектор-столбцами) $f_{\dot{\gamma}}$ и $f_{\dot{\psi}}$, обеспечивающие матрицам замкнутых систем управления $A_{\dot{\gamma}}^* = A - Bf_{\dot{\gamma}}c_{\dot{\gamma}}^T$ и $A_{\dot{\psi}}^* = A - Bf_{\dot{\psi}}c_{\dot{\psi}}^T$ желаемый характеристический полином

$$p^*(\lambda) = \sum_{i=0}^4 p_i^* \lambda^{4-i} \quad (12)$$

с вещественными коэффициентами $p_0^* = 1$ и p_i^* ($i = \overline{1, 4}$).

Закон управления (10) для модели (7), (8) при измерении только угловой скорости крена синтезирован в работе [10]. В связи с этим, используя подход [10], синтезируем закон управления (11) для модели (7), (9) при измерении только угловой скорости рысканья и рассмотрим числовые примеры использования обоих полученных законов.

Рассматриваемая задача управления по выходу осложняется тем, что в обеих системах – (7), (8) и (7), (9) – суммарный размер векторов управления и наблюдения меньше размера вектора состояния. В связи с этим стандартную декомпозиционную схему аналитического синтеза [12] напрямую использовать невозможно. Предлагается альтернативный подход, когда решается задача управления по выходу при наличии еще одного измерения (угла, соответствующего измеряемой угловой скорости). Управление по выходу системой четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами строится приведением к управлению по состоянию системой с одним входом [13]. Затем обнуляется первый столбец матрицы регулятора за счет коэффициентов полинома (12).

Найдем решение F задачи управления по выходу с желаемым полиномом (12) для матриц состояния A , управления B из модели (7) и матрицы наблюдения C вида

$$C = \begin{bmatrix} 0 & | & 0 & | & 1 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & | & 0 & | & 1 \end{bmatrix},$$

где вторая строка совпадает с вектором $c_{\dot{\psi}}^T$.

Согласно доказанной ранее обобщенной формуле Басса – Гура [14] определим полное множество решений (матриц K) задачи модального управления по состоянию для пары матриц A, B из модели (7) и заданного характеристического полинома (12):

$$K = \left(\left[P_0^* \mid P_1^* \right] - \left[P_0 \mid P_1 \right] \right) \left(U \left[\begin{array}{c|c} P_1 & I_2 \\ \hline I_2 & 0_{2 \times 2} \end{array} \right] \right)^{-1} =$$

$$= \underbrace{\left[P_0^* \mid P_1^* \right]}_{R_1} \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_x & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_y & 0 \\ \hline 0 & J_x & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & J_y \end{array} \right] + \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} J_x a_{2,1} & 0 & 0 & J_x a_{2,4} \\ \hline 0 & J_y a_{4,2} & J_y a_{4,3} & 0 \end{array} \right]}_{R_2}, \quad (13)$$

где $P_0 = [I_2 \mid 0_{2 \times 2}]P$, $P_1 = [0_{2 \times 2} \mid I_2]P$, $P = -U^{-1}A^2B$, $U = [B \mid AB]$, а матрицы $P_0^* \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $P_1^* \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ выбираются так, чтобы выполнялось равенство

$$\left| \lambda^2 I_2 + \lambda P_1^* + P_0^* \right| = p^*(\lambda). \quad (14)$$

Здесь и далее I_n – единичная матрица порядка n ; $0_{n \times m}$ – нулевая матрица размером $n \times m$, $\mathbb{R}^{n \times m}$ – множество вещественных матриц размером $n \times m$.

Уравнение связи между матрицами регуляторов по состоянию K и по выходу F

$$FC = K \quad (15)$$

разрешимо относительно матрицы F при условии [15]

$$\underbrace{\left(\left[P_0^* \mid P_1^* \right] R_1 + R_2 \right)}_K \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]}_{\bar{C}^R} = 0_{2 \times 2} \Rightarrow \left[P_0^* \mid P_1^* \right] \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} J_x & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & J_x \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]}_{G=R_1 \bar{C}^R} = - \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} J_x a_{2,1} & 0 \\ \hline 0 & J_y a_{4,2} \end{array} \right]}_{H=R_2 \bar{C}^R},$$

где \bar{C}^R – правый аннулятор максимального ранга [16] матрицы C . Это условие будет выполнено, если назначить матрицы P_0^* и P_1^* такими, что [15]

$$\left[P_0^* \mid P_1^* \right] = -H \underbrace{\frac{1}{J_x} \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]}_{G^+ = (G^T G)^{-1} G^T} + \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} q_{1,1} & q_{1,2} \\ \hline q_{2,1} & q_{2,2} \end{array} \right]}_Q \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{\bar{G}^L} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} -a_{2,1} & q_{1,1} & 0 & q_{1,2} \\ \hline 0 & q_{2,1} & -\tilde{a}_{4,2} & q_{2,2} \end{array} \right], \quad (16)$$

где $\tilde{a}_{4,2} = (J_y/J_x)a_{4,2}$; \bar{G}^L , G^+ – левый аннулятор максимального ранга [16] и псевдообращение [17] матрицы G ; $q_{1,1}$, $q_{1,2}$, $q_{2,1}$, $q_{2,2}$ – вещественные параметры.

За счет параметров матрицы Q необходимо аналитически обеспечить заданный характеристический полином $\text{poly} \Phi = \left| \lambda^2 I_2 + \lambda P_1^* + P_0^* \right|$ (14) матрице [18]

$$\Phi = \left[\begin{array}{c|c} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ \hline -P_0^* & -P_1^* \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_{2,1} & -q_{1,1} & 0 & -q_{1,2} \\ \hline 0 & -q_{2,1} & \tilde{a}_{4,2} & -q_{2,2} \end{array} \right].$$

Заметим, что если транспонировать нижние блоки матрицы Φ , то ее характеристический полином не изменится:

$$|\lambda^2 I_2 + \lambda P_1^* + P_0^*| = |\lambda^2 I_2 + \lambda P_1^{*\top} + P_0^{*\top}|.$$

Теперь характеристический полином (14) обеспечивается подобной матрице вида

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ -P_0^{*\top} & -P_1^{*\top} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{2,1} & 0 & 0 & \tilde{a}_{4,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{b}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{2,1} & q_{1,2} & q_{2,2} \end{bmatrix}}_{\tilde{k}^\top}.$$

Таким образом, задача управления по выходу системой с двумя входами и двумя выходами свелась к задаче управления по состоянию системой с одним входом – нахождению вектора \tilde{k}^\top , обеспечивающего заданный полином $\text{poly}(\tilde{A} - \tilde{b}\tilde{k}^\top) = p^*(\lambda)$. Эта задача имеет единственное решение, которое находится по формуле Аккермана [19]:

$$\begin{aligned} \tilde{k}^\top &= [0 \mid 0 \mid 0 \mid 1] [\tilde{b} \mid \tilde{A}\tilde{b} \mid \tilde{A}^2\tilde{b} \mid \tilde{A}^3\tilde{b}]^{-1} p^*(\tilde{A}) = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} p_3^* + p_1^* a_{2,1} & -p_4^* \\ \hline \tilde{a}_{4,2} & a_{2,1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & \left(a_{2,1} + p_2^* + \frac{p_4^*}{a_{2,1}} \right) \\ \hline \tilde{a}_{4,2} & p_1^* \end{array} \right] = \\ &= [q_{1,1} \mid q_{2,1} \mid q_{1,2} \mid q_{2,2}]. \end{aligned}$$

Полученные значения параметров $q_{1,1}$, $q_{1,2}$, $q_{2,1}$, $q_{2,2}$ подставляются в формулу (16), а матрица $[P_0^* \mid P_1^*]$ – в формулу (13). Затем определяется единственное решение [12] уравнения (15) – искомая матрица регулятора по выходу:

$$\begin{aligned} F &= \left(\underbrace{[P_0^* \mid P_1^*]}_K R_1 + R_2 \right) \underbrace{C^\top}_{C^+} = \\ &= \begin{bmatrix} J_x & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \frac{p_3^* + p_1^* a_{2,1}}{a_{4,2}} & a_{2,4} + \frac{1}{a_{4,2}} \left(a_{2,1} + p_2^* + \frac{p_4^*}{a_{2,1}} \right) \\ \hline a_{4,3} - \frac{p_4^*}{a_{2,1}} & p_1^* \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Обнулив первый столбец матрицы (17), соответствующий неизвестному (в настоящем исследовании) углу рысканья, получим условия

$$\begin{cases} p_4^* - a_{2,1} a_{4,3} = 0; \\ p_3^* + a_{2,1} p_1^* = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Этим условиям должны удовлетворять коэффициенты полинома (12), для того чтобы имела решение задача управления по выходу с измерением только угловой скорости рысканья. Искомое решение – второй столбец матрицы (17) с подстановкой условий (18):

$$\mathbf{f}_{\dot{\psi}} = \begin{bmatrix} f_{\dot{\psi}1} \\ f_{\dot{\psi}2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x \left(a_{2,4} + \frac{p_2^* + a_{2,1} + a_{4,3}}{a_{4,2}} \right) \\ J_y p_1^* \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Для проверки результата (19), полученного при условиях (18), рассчитаем непосредственно характеристический полином $|\lambda I_4 - A - Bf_{\psi}c_{\psi}^T|$ замкнутой системы управления (7), (9), (11) и приравняем его коэффициенты к соответствующим коэффициентам желаемого полинома (12):

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{f_{\psi 2}}{J_y} & -a_{2,1} - a_{4,3} - a_{2,4}a_{4,2} + \frac{a_{4,2}}{J_x} f_{\psi 1} \\ \hline & -a_{2,1} \frac{f_{\psi 2}}{J_y} \end{array} \middle| \begin{array}{c|c} & a_{2,1}a_{4,3} \\ \hline & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} p_1^* & p_2^* & p_3^* & p_4^* \end{array} \right].$$

Из соотношений для третьего и четвертого коэффициентов в явном виде следуют условия (18), а из соотношений для первого и второго коэффициентов – вектор регулятора (19).

Согласно критерию Гурвица [20], характеристический полином (12) будет иметь свойство устойчивости, если все угловые миноры матрицы Гурвица

$$P^* = \left[\begin{array}{c|c|c|c} p_1^* & p_3^* & 0 & 0 \\ \hline 1 & p_2^* & p_4^* & 0 \\ \hline 0 & p_1^* & p_3^* & 0 \\ \hline 0 & 1 & p_2^* & p_4^* \end{array} \right]$$

положительны, т. е.

$$p_1^* > 0, \quad p_1^* p_2^* > p_3^*, \quad p_3^* (p_1^* p_2^* - p_3^*) > (p_1^*)^2 p_4^*, \quad p_4^* > 0. \quad (20)$$

Неравенства (20) при условиях (18) выполняются, если

$$\underbrace{-4v^2 (J_z - J_y) / J_x}_{a_{2,1}} < 0, \quad \underbrace{-v^2 (J_z - J_x) / J_y}_{a_{4,3}} < 0, \\ p_1^* > 0, \quad p_2^* > -a_{2,1} - a_{4,3}.$$

Таким образом, закон управления (11) с вектором обратной связи (19)

$$f_{\psi} (p_1^*, \tilde{p}_2^*) = \left[J_x (a_{2,4} + \tilde{p}_2^* / a_{4,2}) \mid J_y p_1^* \right]^T, \quad (21)$$

где $\tilde{p}_2^* = p_2^* + a_{2,1} + a_{4,3}$, существует и является стабилизирующим, если

$$J_z > J_x, \quad J_z > J_y; \\ p_1^* > 0, \quad \tilde{p}_2^* > 0. \quad (22)$$

Матрица замкнутой системы управления (7), (9), (11), (21) имеет вид

$$A_{\psi}^* (p_1^*, \tilde{p}_2^*) = A - Bf_{\psi} (p_1^*, \tilde{p}_2^*) c_{\psi}^T = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline a_{2,1} & 0 & 0 & -\tilde{p}_2^* / a_{4,2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & -p_1^* \end{array} \right]. \quad (23)$$

Вектор регулятора по выходу, аналогичный вектору (21), но при измерении только угловой скорости крена $\dot{\gamma}$ был получен в работе [10]:

$$f_{\dot{\gamma}} (p_1^*, \tilde{p}_2^*) = \left[J_x p_1^* \mid J_y (a_{4,2} + \tilde{p}_2^* / a_{4,4}) \right]^T. \quad (24)$$

Матрица замкнутой системы управления (7), (8), (10), (24) имеет вид

$$A_i^*(p_1^*, \tilde{p}_2^*) = A - Bf_{\dot{\gamma}}(p_1^*, \tilde{p}_2^*)c_{\dot{\gamma}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & -p_1^* & 0 & a_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\tilde{p}_2^*/a_{2,4} & a_{4,3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Таким образом, закон управления (10), (24) или (11), (21) во взаимосвязанных каналах крена и рысканья, а также закон управления (3), (4) в канале тангажа, заимствованный из работы [11], определяют аналитическое решение поставленной задачи исследования.

Далее на конкретном примере покажем, как выбираются (оптимизируются) параметры $p_1^* > 0$ и $\tilde{p}_2^* > 0$, а также параметр $q_1^* > 0$ в законах управления по критерию минимизации времени переходного процесса при ограничениях на углы (примерно 30°) и угловые скорости (примерно $0,75v$), вызванных линеаризацией [1].

В качестве примера рассмотрим орбитальную ориентацию гипотетического космического аппарата с осевыми моментами инерции $[J_x \mid J_y \mid J_z] = [1,9 \mid 1,8 \mid 2,6] \cdot 10^4$ кг · м² на круговой околоземной орбите высотой 300 км ($v = 0,0664$ град/с, 1 виток = 5424 с). Моменты инерции удовлетворяют условиям (5), (22).

За момент окончания переходного процесса τ принимается момент времени, когда точность стабилизации по углам достигает $0,2^\circ$ и далее не выходит за пределы этой величины.

Будем выбирать (оптимизировать) параметры $p_1^* > 0$ и $\tilde{p}_2^* > 0$ в законах управления (10), (24) и (11), (21) а также параметр $q_1^* > 0$ в законе управления (3), (4) с точностью до четырех значащих цифр из условия уменьшения (насколько возможно) времени переходного процесса при вызванных линеаризацией ограничениях на углы и угловые скорости в пределах переходного процесса:

$$\forall t \in [0; \tau] \quad \begin{aligned} \max(|\gamma(t)|, |\psi(t)|, |\vartheta(t)|) &\leq 30^\circ; \\ \max(|\dot{\gamma}(t)|, |\dot{\psi}(t)|, |\dot{\vartheta}(t)|) &\leq 0,05 \text{ град/с}. \end{aligned} \quad (26)$$

Опишем процесс выбора параметров p_1^* , \tilde{p}_2^* в законах управления (10) (24) и (10), (21). Выбор параметра q_1^* в законе управления (3), (4) осуществляется аналогично.

Для различных значений параметров p_1^* , \tilde{p}_2^* в среде MATLAB [21] с шагом 1 с моделировались переходные процессы

$$x(t) = \expm(A^*(p_1^*, \tilde{p}_2^*)t)x(0), \quad (27)$$

где \expm – функция матричной экспоненты [21]; $A^*(p_1^*, \tilde{p}_2^*)$ – матрица замкнутой системы управления (23) или (25), при $2^4 = 16$ комбинациях начальных условий, отличающихся знаками: $[\gamma(0) \mid \psi(0)] = [\pm 5 \mid \pm 5]$ град, $[\dot{\gamma}(0) \mid \dot{\psi}(0)] = [\pm 0,01 \mid \pm 0,01]$ град/с.

В каждой серии из шестнадцати переходных процессов с указанными начальными условиями определялись наибольшие по модулю (за все время переходных процессов из всех шестнадцати переходных процессов) значения компонент вектора состояния (углы γ_{\max} , ψ_{\max} , град; угловые скорости $\dot{\gamma}_{\max}$, $\dot{\psi}_{\max}$, град/с), а также наибольшие (из шестнадцати переходных процессов) значения длительности переходного процесса τ_{\max} , с.

Оптимизация выполнялась с помощью функции `fminsearch` [21] в три этапа. Стартовые значения параметров p_1^* , \tilde{p}_2^* на первом этапе задавались случайным образом (равномерное распределение). Стар-

товыми значениями параметров p_1^* , \tilde{p}_2^* на втором и третьем этапах становились оптимальные (локальный экстремум) значения этих параметров, полученные на предыдущем этапе.

На первом этапе, без моделирования процессов (27), определялся наилучший возможный запас устойчивости η . Этап является предварительным и необходим для уменьшения общего времени моделирования процессов (27). Критерий оптимизации:

$$Q_1(p_1^*, \tilde{p}_2^*) = \eta(p_1^*, \tilde{p}_2^*) = \min_{i=1,4} \left| \operatorname{Re} \phi_i^*(p_1^*, \tilde{p}_2^*) \right| \rightarrow \max_{p_1^*, \tilde{p}_2^*},$$

где ϕ_i^* – собственные значения матрицы A^* .

На втором этапе, с моделированием процессов (27), обеспечивалось выполнение условий (26) с наилучшим возможным запасом, а также с некоторым контролем длительности переходного процесса. Критерий оптимизации:

$$Q_2(p_1^*, \tilde{p}_2^*) = \max \left(\begin{array}{l} \gamma_{\max}(p_1^*, \tilde{p}_2^*) \\ \Psi_{\max}(p_1^*, \tilde{p}_2^*) \end{array} \right) + 10 \max \left(\begin{array}{l} \dot{\gamma}_{\max}(p_1^*, \tilde{p}_2^*) \\ \dot{\Psi}_{\max}(p_1^*, \tilde{p}_2^*) \end{array} \right) + \frac{\tau_{\max}(p_1^*, \tilde{p}_2^*)}{5000} \rightarrow \min_{p_1^*, \tilde{p}_2^*}.$$

На третьем этапе, с моделированием процессов (27), минимизировалась длительность переходного процесса при выполнении условий линеаризации (26). Критерий оптимизации:

$$Q_3(p_1^*, \tilde{p}_2^*) = \tau_{\max}(p_1^*, \tilde{p}_2^*) \rightarrow \min_{p_1^*, \tilde{p}_2^*, \text{ усл. лин.}}$$

Результаты оптимизации параметров p_1^* , \tilde{p}_2^* для управляемого движения рассматриваемого космического аппарата, описываемого матрицей (25), во взаимосвязанных каналах крена и рысканья при изменении только угловой скорости крена представлены в табл. 1.

Таблица 1

Этап	$p_1^*; \tilde{p}_2^*$	η	γ_{\max} , град; $\dot{\gamma}_{\max}$, град/с	Ψ_{\max} , град; $\dot{\Psi}_{\max}$, град/с	τ_{\max} , с
1	$15,700 \cdot 10^{-3}$ $16,460 \cdot 10^{-6}$	$4,312 \cdot 10^{-4}$	5,516 0,010	34,303 0,025	24488
2	$13,880 \cdot 10^{-3}$ $4,602 \cdot 10^{-6}$	$1,632 \cdot 10^{-4}$	5,607 0,010	22,897 0,016	27541
3	$11,590 \cdot 10^{-3}$ $8,867 \cdot 10^{-6}$	$3,491 \cdot 10^{-4}$	5,681 0,010	29,892 0,021	13503

Примечание: Полужирным выделены окончательно выбранные значения, принятые оптимальными.

Результаты оптимизации параметров p_1^* , \tilde{p}_2^* для управляемого движения рассматриваемого космического аппарата, описываемого матрицей (23), во взаимосвязанных каналах крена и рысканья при изменении только угловой скорости рысканья представлены в табл. 2.

Таблица 2

Этап	$p_1^*; \tilde{p}_2^*$	η	γ_{\max} , град; $\dot{\gamma}_{\max}$, град/с	Ψ_{\max} , град; $\dot{\Psi}_{\max}$, град/с	τ_{\max} , с
1	$2,071 \cdot 10^{-3}$ $2,821 \cdot 10^{-6}$	$5,164 \cdot 10^{-4}$	13,467 0,021	8,953 0,010	12367
2	$2,129 \cdot 10^{-3}$ $1,300 \cdot 10^{-6}$	$2,550 \cdot 10^{-4}$	10,626 0,016	9,692 0,010	15148
3	$1,723 \cdot 10^{-3}$ $2,446 \cdot 10^{-6}$	$4,270 \cdot 10^{-4}$	13,237 0,020	9,475 0,010	9911

Примечание: Полужирным выделены окончательно выбранные значения, принятые оптимальными.

Результаты оптимизации параметра q_1^* для управляемого движения рассматриваемого космического аппарата, описываемого матрицей (6), в канале тангажа при измерении только угловой скорости тангажа представлены в табл. 3.

Таблица 3

Этап	q_1^*	η	ϑ_{\max} , град	$\dot{\vartheta}_{\max}$, град/с	τ_{\max} , с
1	$0,787 \cdot 10^{-3}$	$3,935 \cdot 10^{-4}$	13,187	0,010	17766
2	$0,703 \cdot 10^{-3}$	$3,517 \cdot 10^{-4}$	13,770	0,010	14482
3	$0,634 \cdot 10^{-3}$	$3,170 \cdot 10^{-4}$	14,318	0,010	12715

Примечание: Полужирным выделены окончательно выбранные значения, принятые оптимальными.

Для проверки работы законов управления (10), (24) и (11), (21) с оптимальными параметрами p_1^* , \tilde{p}_2^* (табл. 1, 2, этап 3), а также закона управления (3), (4) с оптимальным параметром q_1^* (табл. 3, этап 3) промоделированы по 10^4 переходных процессов при случайных (равномерное распределение) начальных условиях из следующих диапазонов

$$\max(|\gamma(0)|, |\psi(0)|, |\vartheta(0)|) \leq 5^\circ; \max(|\dot{\gamma}(0)|, |\dot{\psi}(0)|, |\dot{\vartheta}(0)|) \leq 0,01 \text{ град/с}.$$

Моделированием подтвержден факт о стабилизирующей природе разработанных законов управления. Каждый из предложенных законов обеспечивает выполнение условий линеаризации (26) при всех рассмотренных вариантах случайных начальных условий.

Для управляемого процесса трехосной орбитальной стабилизации космического аппарата при измерении только угловых скоростей крена и тангажа наибольшая (из 10^4 вариантов начальных условий) длительность переходного процесса, составившая 13464 с (2,48 витка), была получена при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} [\gamma(0) \mid \psi(0) \mid \vartheta(0)] &= [-4,384 \mid 4,302 \mid 4,958] \text{ град}, \\ [\dot{\gamma}(0) \mid \dot{\psi}(0) \mid \dot{\vartheta}(0)] &= [-9,090 \mid -9,870 \mid -9,830] \cdot 10^{-3} \text{ град/с}. \end{aligned}$$

Наиболее длительный переходный процесс стабилизации углового положения космического аппарата при измерении только угловых скоростей крена и тангажа иллюстрирует рис. 1.

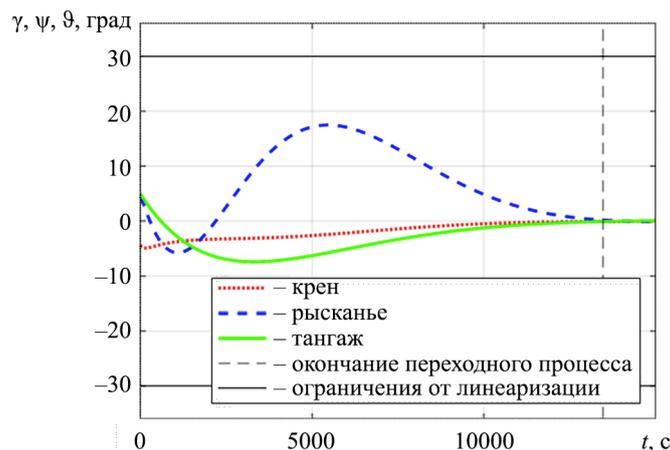


Рис. 1

Наиболее длительный переходный процесс стабилизации угловых скоростей космического аппарата при измерении только угловых скоростей крена и тангажа приведен на рис. 2.

Для управляемого процесса трехосной орбитальной стабилизации космического аппарата при измерении только угловых скоростей рысканья и тангажа наибольшая (из 10^4 вариантов начальных усло-

вий) длительность переходного процесса, составившая 12701 с (2,34 витка), была получена при начальных условиях

$$[\gamma(0) \mid \psi(0) \mid \vartheta(0)] = [2,902 \mid 3,469 \mid 4,958] \text{ град};$$

$$[\dot{\gamma}(0) \mid \dot{\psi}(0) \mid \dot{\vartheta}(0)] = [9,467 \mid 9,954 \mid -9,830] \cdot 10^{-3} \text{ град/с}.$$

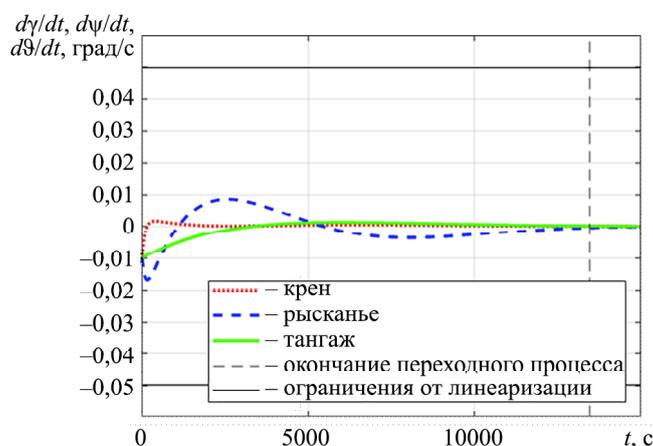


Рис. 2

Наиболее длительный переходный процесс стабилизации углового положения космического аппарата при измерении только угловых скоростей рысканья и тангажа иллюстрирует рис. 3.

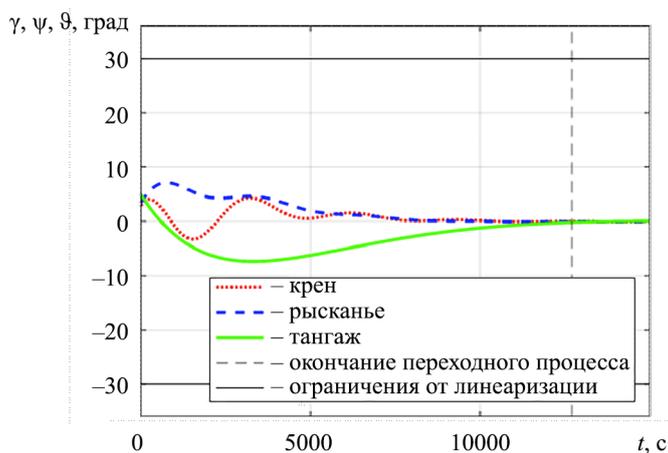


Рис. 3

Наиболее длительный переходный процесс стабилизации угловых скоростей космического аппарата при измерении только угловых скоростей рысканья и тангажа приведен на рис. 4.

При измерении только угловых скоростей крена и тангажа (см. рис. 1, 2) переходный процесс в канале тангажа завершается раньше, чем во взаимосвязанных каналах крена и рысканья. При измерении только угловых скоростей рысканья и тангажа (см. рис. 3, 4) быстрее протекает переходный процесс во взаимосвязанных каналах крена и рысканья. Это связано с ограничением (5), наложенным на моменты инерции.

В силу того что при использовании линеаризованной модели углового движения космического аппарата на круговой орбите канал тангажа не связан с каналами крена и рысканья, в работе построены стабилизирующие законы управления орбитальной ориентацией во взаимосвязанных каналах крена и рысканья при измерении только угловой скорости крена или только угловой скорости рысканья, а также заимствовано полученное ранее управление в канале тангажа при измерении только угловой скорости тангажа.

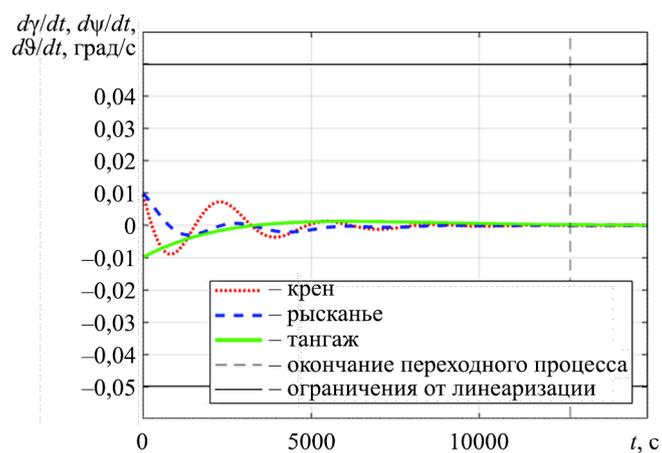


Рис. 4

Законы получены с помощью аналитического синтеза управления по выходу для линейной стационарной системы управления четвертого порядка с двумя входами и одним выходом. Регулятор по выходу рассчитан на основе решения аналогичной задачи с двумя входами и двумя выходами (добавляется угол крена или рысканья) и обнуления столбца, соответствующего добавленному углу. Выполнена оптимизация коэффициентов желаемого характеристического полинома по длительности переходного процесса при ограничениях на углы и угловые скорости, вызванных линеаризацией. Применимость подхода подтверждена примерами численного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисенко Н.Ю., Сумароков А.В. Об ускоренном построении орбитальной ориентации грузовых и транспортных кораблей серий «Союз МС» и «Прогресс МС» // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 5. С. 131–141.
2. Зубов Н.Е., Латин А.В., Рябченко В.Н. Аналитический алгоритм построения орбитальной ориентации космического аппарата при неполном измерении компонент вектора состояния // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019. № 6. С. 128–138.
3. Зубов Н.Е. и др. Аналитический синтез законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата по информации об одном угле и полном векторе угловой скорости // Изв. вузов. Авиационная техника. 2018. № 2. С. 53–63.
4. Зубов Н.Е. и др. Идентификация положения равновесной ориентации Международной космической станции как задача матричного пополнения с устойчивостью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 130–144.
5. Романенко Л.Г., Романенко А.Г., Самарова Г.Г. Управление продольным движением летательного аппарата при отсутствии в автопилоте сигнала по углу тангажа // Изв. вузов. Авиационная техника. 2014. № 4. С. 25–29.
6. Романенко Л.Г., Самарова Г.Г., Романенко А.Г. Управление боковым движением летательного аппарата при отсутствии в автопилоте сигнала по углу крена // Изв. вузов. Авиационная техника. 2014. № 2. С. 19–23.
7. Богачев А.В. и др. Разгрузка кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата в канале тангажа // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. № 3. С. 132–139.
8. Сумароков А.В., Платонов В.Н. Обеспечение точностных характеристик стабилизации перспективного космического аппарата дистанционного зондирования Земли // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 4. С. 193–205.
9. Зубов Н.Е., Латин А.В., Рябченко В.Н. Аналитический синтез модального регулятора по выходу для управления ориентацией спускаемого аппарата при спуске в атмосфере Земли // Изв. вузов. Авиационная техника. 2019. № 3. С. 46–59.
10. Латин А.В., Зубов Н.Е. Стабилизация орбитальной ориентации космического аппарата в каналах крена и рысканья при измерении только угловой скорости крена // 48-е Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024. Т. 2. С. 469–473.

11. Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н. Синтез аналитических законов стабилизации орбитальной ориентации космического аппарата при отсутствии информации об измерении углов ориентации // Космическая техника и технологии. 2024. № 3 (46). С. 131–39.
12. Зубов Н.Е. и др. Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Воуда // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 3. С. 260–263.
13. Зубов Н.Е., Лапин А.В. Приведение модального управления по выходу для стационарных систем четвертого порядка с двумя входами и двумя выходами к управлению по состоянию системой с одним входом // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2023. № 2. С. 26–43.
14. Lapin A.V., Zubov N.E. Generalization of Bass – Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. 2020. Vol. 89. Iss. 2. P. 41–64.
15. Galiaskarov I.M. et al. Non-Parametric Method for Identification and Prediction of Events in the Power System Based on Digital Signal Processing Device // AIP Conference Proceedings. 2023. Vol. 2552. Iss. 1. Article № 050009.
16. Gadzhiev M.G. et al. Reduction and Equivalencing of Equations of Electrical Network Based on Matrix Annihilators // Energy System Research. 2018. Vol. 1. Iss. 1. P. 94–99.
17. Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N., Zybin E.Yu. Block Algebraic Problem Solution and its Application in Calculations of Electrical Networks and Systems // IEEE Russia Power Tech, June 27–30, 2005, St. Petersburg, Russia. P. 1–5.
18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
19. Ackermann J., Utkin V. Sliding Mode Control Design Based on Ackermann's Formula // IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 43. Iss. 2. P. 234–237.
20. Bodson M. Explaining the Routh – Hurwitz Criterion: A Tutorial Presentation (Focus on Education) // IEEE Control Systems Magazine. 2020. Vol. 40. Iss. 1. P. 45–51.
21. Kisacanin B., Agarwal G.C. Linear Control Systems: with Solved Problems and MATLAB Examples [Electronical Resource]. URL: <https://z-library.sk/book/2093868/bd078d/linear-control-systems-with-solved-problems-and-matlab-examples.html> (дата обращения: 10.03.2025).

Поступила в редакцию 10.04.25

После доработки 16.04.25

Принята к публикации 17.04.25

Stabilizing the Orbital Orientation of a Spacecraft at Measuring only Angular Rates of Roll and Pitch or Angular Rates of Yaw and Pitch

N.E. ZUBOV, A.V. LAPIN, AND V.N. RYABCHENKO

Bauman Moscow State Technical University, Moscow

The stabilizing laws are built for controlling the orbital orientation of a spacecraft at measuring only angular rates of roll and pitch or angular rates of yaw and pitch. The laws are obtained via analytical synthesis of control by output. The controllers by output are calculated based on a set of controllers by state using the matrix equation of coupling. The specified spectrum of a block matrix for the closed-loop control system is provided by means of similarity transformation in the form of block transposing that made it possible to switch from control by output for a system with two inputs to control by state for a system with a single input. The conditions are given at which controllers by output exist and become stabilizing. Specific values of adjusting constants minimize the duration of transient at restrictions on angles and angular rates caused by linearization. The applicability of suggesting approach is confirmed by examples of numerical simulation.

Gravitational torque, decomposition approach, orbital orientation, similarity transformation, control by output