

## Ограничения по статической прочности для оптимального проектирования конструктивно-анизотропных композитных обшивок воздушных судов средней и большой толщины

*Приведены соотношения математической модели для исследования статической прочности слоисто-анизотропных композитных панелей летательных аппаратов с обшивкой средней и большой толщины с учетом деформаций поперечного сдвига. Разработан подход к решению задач статической прочности в рамках нового разрешающего дифференциального уравнения в частных производных десятого порядка. Для частного случая согласованных граничных условий на продольных сторонах панели интеграл уравнения представлен аналитически в одинарных тригонометрических рядах Фурье. Построены новые аналитические ограничения на целевую функцию при оптимальном проектировании слоисто-анизотропных композитных обшивок средней и большой толщины в соответствии с уточненной теорией. Представлены результаты определения послойного напряженно-деформированного состояния ортотропной обшивки большой толщины в центре панели в системе координат, связанной со слоем, для сжатых в продольном направлении плоских прямоугольных обшивок из углепластика. Обоснована возможность использования математических моделей, сведенных к аналитическому решению задач статической прочности для разрешающего уравнения с линейным дифференциальным оператором десятого порядка, в качестве ограничений при проектировании конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов для перспективных изделий авиационной техники.*

**Л.М. ГАВВА,**  
д-р техн. наук,  
**Т.А. ХАН**  
(МАИ, Москва)  
nio1asp@mail.ru

**Панели из композиционных материалов, деформации поперечного сдвига, статическая прочность, оптимальное проектирование, аналитические ограничения**

Новые уточненные математические модели составляют основу проектирования и оптимизации конструкций. Важным тематическим направлением в рамках приоритетных комплексных проектов является расчет и цифровое проектирование композитных несущих конструкций в области соединения с фюзеляжем.

В контексте передовых исследований для разработки размерно-весового проекта в области бортовой и корневой нервюр предполагается использование метода оптимального проектирования конструктивно-анизотропных панелей несущих поверхностей летательных аппаратов из композитных материалов с ограничениями на целевую функцию веса в соответствии с уточнениями по статической прочности.

Когда толщина обшивки является средней или большой, в условиях оптимального проектирования панелей вблизи бортовой и корневой нервюр необходимо устанавливать ограничения на целевую функцию веса на основе прочности на сжатие. Критические напряжения потери устойчивости, средние по пакету, соответствуют высоким уровням запасов по устойчивости.

Цель данной работы – постановка задач статики, моделирование напряженно-деформированного состояния слоисто-анизотропных панелей из полимерных композиционных материалов с учетом деформаций поперечного сдвига, построение аналитического решения нового разрешающего дифференциального уравнения десятого порядка в частных производных для произвольных краевых задач на торцах панели, учет реальных условий закрепления панели в составе проектируемых конструкций.

Рассматриваются статические задачи для плоской прямоугольной многослойной панели средней и большой толщины, изготовленной из полимерных композиционных материалов. Анизотропные свойства панели обусловлены несимметричной укладкой слоев пакета.

Новым научным результатом является следующее:

- разработка нового подхода к оптимальному проектированию конструктивно-анизотропных панелей несущих поверхностей летательного аппарата из композиционных материалов в соответствии с

уточненными ограничениями по статической прочности для реализации оптимального размерно-веса проекта;

- формирование новой математической модели для исследования с учетом деформаций поперечного сдвига статической прочности слоисто-анизотропных композитных панелей летательного аппарата с обшивкой средней и большой толщины, находящихся в условиях механического воздействия;

- построение новых ограничений на целевую функцию при оптимальном проектировании слоисто-анизотропных композитных панелей летательного аппарата с обшивкой средней и большой толщины в соответствии с уточненными ограничениями по статической прочности с учетом деформаций поперечного сдвига.

Научная новизна работы заключается в дальнейшем развитии теории деформаций поперечного сдвига первого порядка.

При оптимальном проектировании, когда целевая функция веса панели исследуется на условный экстремум в строгой математической постановке, построенные по уточненной теории аналитические решения задач прочности вводятся в качестве строгих ограничений для перехода к безусловному экстремуму функции Лагранжа.

В исследовании [1] проводится оптимизация многослойных композитных обшивок с целью минимизации энергии деформации в статических задачах.

Представлена [2] инновационная схема проектирования композитных панелей с переменной жесткостью с акцентом на максимизацию прочности конструкции. В качестве основных переменных проектирования используются параметры ламинирования, что позволяет компактно и непрерывно представлять жесткостные свойства ламината. Применяется критерий разрушения Цай – Ву для учета ограничений по прочности в пространстве проектирования. Методология подтверждена на численном примере: квадратная панель подвергается одноосному растяжению. Оптимальные по прочности конструкции сравниваются с оптимальными по жесткости и квазиизотропными конструкциями, наблюдается значительное улучшение характеристик.

В статье [3] рассматриваются стратегии оптимизации композитных слоистых материалов с акцентом на применение композитов при проектировании авиационных конструкций. Разрабатываются рекомендации по проектированию, направленные на улучшение механических характеристик композитных материалов с учетом ориентации волокон, толщины ламината и последовательности укладки слоев. Посредством серии симуляций и экспериментальных проверок продемонстрированы преимущества предложенных методов оптимизации.

В статье [4] представлена новая стратегия структурной оптимизации крыльев из композитных материалов с использованием эквивалентной конечно-элементной модели. Исследуется необходимость снижения веса при проектировании самолетов, которое является критическим фактором в аэрокосмической промышленности. По полученным результатам выявлено значительное повышение конструктивной эффективности крыльев из композитных материалов по сравнению с традиционными конструкциями. Сделан вывод об актуальности представленных количественных результатов, включая распределение напряжений и снижение веса.

В монографии [5] исследуется задача оптимального проектирования слоистых пластин минимальной массы с учетом требований прочности. Для решения применяется алгоритм оптимизации, основанный на сочетании метода градиентов и метода координатного спуска.

Алгоритм выбора конструктивно-силовой схемы крыла с учетом критериев прочности представлен в исследованиях [6, 7]. Реализация алгоритма [6] выполнена с использованием программного комплекса «Аргон», разработанного в ЦАГИ (Жуковский).

В статье [8] предложен алгоритм, позволяющий определить оптимальную толщину пакета и соответствующее количество слоев с ориентацией  $45^\circ$ ;  $-45^\circ$ ;  $0^\circ$ ;  $90^\circ$  на основе критерия прочности Мизеса – Хилла. С помощью алгоритма осуществляется перебор всех возможных комбинаций слоев для каждого варианта, вычисляется коэффициент перегруженности по указанному критерию, затем отбираются вари-

анты с наиболее приемлемым значением коэффициента перегруженности. Из отобранных конструктивных решений выбирается конфигурация с минимальным числом слоев.

Проблема выбора оптимальной схемы укладки рассмотрена в исследовании [9], где анализировались различные варианты укладки в регулярной зоне конструкции из полимерного композиционного материала, применяемой в авиационной технике. Для оценки прочностных характеристик использовались стандартные вычислительные модули MSC.PATRAN/MSC.NASTRAN. В рамках исследования определены максимальные напряжения в ламинатах для различных вариантов укладки, рассчитаны индексы разрушения и запасы прочности, а также оценены максимальные деформации, которые во всех случаях не превышают предельно допустимых значений.

Оптимизация схемы укладки слоев в подкрепленной панели посредством последовательного послойного добавления материала исследована в работе [10]. Подкрепленная панель моделируется как эквивалентная гладкая структура с аналогичными жесткостными характеристиками.

В работах [11, 12] представлены алгоритмы оптимизации параметров тонкостенных несущих панелей из слоистого композита, обеспечивающие минимальную массу конструкции при выполнении требований прочности и соблюдении заданных технологических ограничений.

Существующие алгоритмы оптимизации фокусируются на общей прочности пакета, прочность отдельных слоев игнорируется, что ограничивает их использование. Ряд подходов ограничивается представлением процентного содержания слоев и необходимой толщины пакета без учета изменения положения слоев в укладке, что существенно влияет на жесткостные характеристики.

В аналитических моделях подкрепленных панелей применяется концепция эффективной жесткости, неадекватно отражающая взаимодействие стрингеров с обшивкой. Из-за данного упущения невозможно корректное определение оптимальной высоты стрингеров в задачах проектирования.

Разработанный программный комплекс обеспечивает эффективное выполнение размерно-весовой оптимизации слоисто-анизотропных панелей с обшивкой средней и большой толщины, применяемых в современных авиационных конструкциях. Использование точных аналитических методов позволяет существенно сократить время расчетов, обеспечивая высокую точность и практическую ценность полученных результатов.

С целью математической формулировки ограничений на целевую функцию веса рассматривается сложное напряженно-деформированное состояние слоисто-анизотропных панелей из композиционных материалов.

Панели подвержены действию распределенной поперечной нагрузки  $q(x, y)$ . Условия закрепления граничных кромок определяются условиями упругой заделки при реальном закреплении панели в структуре проектируемой конструкции.

Теория деформаций поперечного сдвига первого порядка [13] расширяет кинематику классической теории Кирхгофа для многослойной панели [14] посредством обобщения кинематических гипотез и включения существенных поперечных сдвиговых деформаций в статико-геометрическую модель  $k$ -го слоя композитной обшивки средней и большой толщины.

Кинематические соотношения  $k$ -го слоя композитной обшивки средней и большой толщины содержат пять неизвестных функций (1): три компонента вектора перемещений  $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $w(x, y)$ , два угла поворота относительно осей  $y$  и  $x$ , соответственно,  $\varphi_x(x, y)$ ,  $\varphi_y(x, y)$ :

$$\left. \begin{aligned} u^{(k)}(x, y, z) &= u_0(x, y) + \varphi_x(x, y)z^{(k)} \\ v^{(k)}(x, y, z) &= v_0(x, y) + \varphi_y(x, y)z^{(k)} \\ w^{(k)}(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Статическая модель  $k$ -го слоя композитной обшивки средней и большой толщины:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{45} \end{bmatrix}^{(k)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} z^{(k)} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} z^{(k)} \\ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) z^{(k)} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Деформации поперечного сдвига предполагаются постоянными по отношению к поперечной координате  $z$ , обжатие нормали по толщине панели не учитывается.

Теория деформаций поперечного сдвига первого порядка требует учета факторов сдвиговой коррекции при вычислении жесткостных характеристик панели. Коэффициенты сдвиговой коррекции зависят от схемы укладки пакета, геометрических параметров конструкции, внешней нагрузки и граничных условий. Осложнено определение факторов сдвиговой коррекции в случае ламината с несимметричной структурой пакета.

Для ортотропной обшивки средней и большой толщины приведены результаты нового математического моделирования: выведено новое разрешающее дифференциальное уравнение в частных производных десятого порядка (3) [14, 15].

Разрешающее уравнение десятого порядка построено методом символического интегрирования системы пяти дифференциальных уравнений равновесия панели в рамках уточненной модели с учетом деформаций поперечного сдвига в плоскостях  $x0z$  и  $y0z$ , которыми пренебрегают при расчете тонких обшивок:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{10,0} \frac{\partial^{10}}{\partial x^{10}} + K_{8,2} \frac{\partial^{10}}{\partial x^8 \partial y^2} + K_{6,4} \frac{\partial^{10}}{\partial x^6 \partial y^4} + K_{4,6} \frac{\partial^{10}}{\partial x^4 \partial y^6} + K_{2,8} \frac{\partial^{10}}{\partial x^2 \partial y^8} + K_{0,10} \frac{\partial^{10}}{\partial y^{10}} + \\ + K_{8,0} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + K_{6,2} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + K_{4,4} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + K_{2,6} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + K_{0,8} \frac{\partial^8}{\partial y^8} + \\ + K_{6,0} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + K_{4,2} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + K_{2,4} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + K_{0,6} \frac{\partial^6}{\partial y^6} \end{array} \right\} \Phi(x, y) = q. \quad (3)$$

Линейный дифференциальный оператор разрешающего уравнения содержит производные четного порядка по каждой из координат, если структура композитной панели ортотропна. Постоянные коэффициенты уравнения определяются геометрией панели и упругими характеристиками материала конструкции. Модули сдвига полимерного композита в вертикальных плоскостях  $x0z$ ,  $y0z$  одинаковы.

Проблема исследования напряженно-деформированного состояния слоисто-анизотропных панелей ортотропной структуры с точки зрения математического моделирования сводится к решению краевой задачи в прямоугольной области для неоднородного линейного дифференциального уравнения десятого порядка в частных производных относительно  $\Phi(x, y)$  – искомой разрешающей функции.

Напряженно-деформированное состояние панели определяется решением краевых задач для разрешающего уравнения (3), когда краевые условия содержат пять уравнений на каждой стороне контура и соответствуют достаточно общей трактовке физических граничных условий элементов конструкции.

Краевая задача общего вида в прямоугольной области представлена условиями упругой заделки:

$$\begin{aligned} x = \text{const}; \\ (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) = (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 \varphi_x + \delta_4 M_x) = (\gamma_5 \varphi_y + \delta_5 H_{xy}) = 0; \\ y = \text{const}; \\ (\alpha_1 u_0 + \beta_1 N_{yx}) = (\alpha_2 v_0 + \beta_2 N_y) = (\alpha_3 w + \beta_3 \bar{Q}_y) = (\alpha_4 \varphi_x + \beta_4 H_{yx}) = (\alpha_5 \varphi_y + \beta_5 M_y) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты  $\gamma_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, i=1, 2, \dots, 5$ , меняются от 0 до 1;  $N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, M_x, M_y, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y, H_{xy}, H_{yx}$  – внутренние силовые факторы.

В рамках соотношений (4) рассматриваются возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба – защемление, скользящая заделка, шарнирное закрепление, свободный край. Граничные условия могут быть кинематическими, статическими и смешанными.

Применение предложенной модели позволяет уточнить значения пределов прочности анизотропных панелей и обеспечить надежную эксплуатацию панелей в условиях высоких механических нагрузок. Проведенные расчеты и полученные результаты демонстрируют значительное улучшение точности проектов по сравнению с традиционными методами анализа тонкостенных обшивок, в связи с чем появляется возможность разработки более совершенных конструктивных решений.

В рамках исследования статической прочности ортотропных панелей существенное значение имеет формализация связей между основными компонентами напряженно-деформированного состояния конструкции и потенциальной функции  $\Phi(x, y)$ . Связи определяются через линейные дифференциальные операторы, которые устанавливают зависимости для перемещений, углов поворота, продольных усилий и изгибающих моментов панели. Ключевым подходом является использование разрешающей потенциальной функции  $\Phi(x, y)$ , позволяющей существенно упростить анализ сложных конструктивных систем.

Благодаря постановке задачи обеспечивается согласованность и взаимосвязанность всех компонентов напряженно-деформированного состояния, что важно для решения задач статической прочности и проектирования. Использование  $\Phi(x, y)$  позволяет перейти к компактным характеристикам сложных процессов деформирования без необходимости прямого учета большого числа взаимозависимых параметров.

Подход эффективен для панелей с обшивкой средней и большой толщины, где поперечные сдвиговые деформации играют существенную роль. Учет деформаций поперечного сдвига в контексте линейных операторов и потенциальной функции позволяет получать точные результаты расчета, что критически важно для проектирования современных конструкций из полимерных композиционных материалов.

Приведем компоненты напряженно-деформированного состояния.

Перемещения:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= L_{u_0} \Phi(x, y); \\ v_0(x, y) &= L_{v_0} \Phi(x, y); \\ w(x, y) &= L_w \Phi(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

где линейные дифференциальные операторы имеют вид

$$\begin{aligned} L_{u_0} &= u_{070} \frac{\partial^7}{\partial x^7} + u_{052} \frac{\partial^7}{\partial x^5 \partial y^2} + u_{034} \frac{\partial^7}{\partial x^3 \partial y^4} + u_{016} \frac{\partial^7}{\partial x \partial y^6} + u_{050} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + u_{032} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + u_{014} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4}; \\ L_{v_0} &= v_{061} \frac{\partial^7}{\partial x^6 \partial y} + v_{043} \frac{\partial^7}{\partial x^4 \partial y^3} + v_{025} \frac{\partial^7}{\partial x^2 \partial y^5} + v_{007} \frac{\partial^7}{\partial y^7} + v_{041} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + v_{023} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + v_{005} \frac{\partial^5}{\partial y^5}; \end{aligned}$$

$$L_w = w_{80} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + w_{62} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + w_{44} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + w_{26} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + w_{08} \frac{\partial^8}{\partial y^8} + w_{60} \frac{\partial^6}{\partial x^6} +$$

$$+ w_{42} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + w_{24} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + w_{06} \frac{\partial^6}{\partial y^6} + w_{40} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + w_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^4} + w_{04} \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Углы поворота:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= L_{\varphi_x} \Phi(x, y); \\ \varphi_y(x, y) &= L_{\varphi_y} \Phi(x, y), \end{aligned} \quad (6)$$

где линейные дифференциальные операторы имеют вид

$$L_{\varphi_x} = FX_{70} \frac{\partial^7}{\partial x^7} + FX_{52} \frac{\partial^7}{\partial x^5 \partial y^2} + FX_{34} \frac{\partial^7}{\partial x^3 \partial y^4} + FX_{16} \frac{\partial^7}{\partial x \partial y^6} +$$

$$+ FX_{50} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + FX_{32} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + FX_{14} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4};$$

$$L_{\varphi_y} = FY_{61} \frac{\partial^7}{\partial x^6 \partial y} + FY_{43} \frac{\partial^7}{\partial x^4 \partial y^3} + FY_{25} \frac{\partial^7}{\partial x^2 \partial y^5} + FY_{07} \frac{\partial^7}{\partial y^7} +$$

$$+ FY_{41} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + FY_{23} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + FY_{05} \frac{\partial^5}{\partial y^5}.$$

Продольные усилия

$$\begin{aligned} N_x(x, y) &= L_{N_x} \Phi(x, y); \\ N_y(x, y) &= L_{N_y} \Phi(x, y), \end{aligned} \quad (7)$$

где линейные дифференциальные операторы имеют вид

$$L_{N_x} = N_{x80} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + N_{x62} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + N_{x44} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + N_{x26} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + N_{x08} \frac{\partial^8}{\partial y^8} +$$

$$+ N_{x60} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + N_{x42} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + N_{x24} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + N_{x06} \frac{\partial^6}{\partial y^6};$$

$$L_{N_y} = N_{y80} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + N_{y62} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + N_{y44} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + N_{y26} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + N_{y08} \frac{\partial^8}{\partial y^8} +$$

$$+ N_{y60} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + N_{y42} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + N_{y24} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + N_{y06} \frac{\partial^6}{\partial y^6}.$$

Изгибающие моменты

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= L_{M_x} \Phi(x, y); \\ M_y(x, y) &= L_{M_y} \Phi(x, y), \end{aligned} \quad (8)$$

где линейные дифференциальные операторы имеют вид

$$L_{M_x} = M_{x80} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + M_{x62} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + M_{x44} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + M_{x26} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + M_{x08} \frac{\partial^8}{\partial y^8} +$$

$$+ M_{x60} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + M_{x42} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + M_{x24} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + M_{x06} \frac{\partial^6}{\partial y^6};$$

$$L_{M_y} = M_{y80} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + M_{y62} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + M_{y44} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + M_{y26} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + M_{y08} \frac{\partial^8}{\partial y^8} +$$

$$+ M_{y60} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + M_{y42} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + M_{y24} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + M_{y06} \frac{\partial^6}{\partial y^6}.$$

В настоящей работе исследуется проблема статической прочности обшивок средней и большой толщины, работающих под действием потоков сжимающих нагрузок  $P$ . Для частного случая согласованных граничных условий на продольных сторонах панели решение представлено в аналитическом виде с использованием одинарных тригонометрических рядов Фурье. В рамках изгибной задачи граничные условия предполагают шарнирное закрепление краев панели, тогда как для плоской задачи используется модель скользящей заделки в тангенциальном направлении при наличии потоков касательных усилий вдоль границы:

$$\begin{aligned} u_0[x, 0] = w[x, 0] = M_y[x, 0] = \varphi_x[x, 0] = 0, N_y[x, 0] = 0; \\ u_0[x, 1] = w[x, 1] = M_y[x, 1] = \varphi_x[x, 1] = 0, N_y[x, 1] = 0; \\ v_0[-1, y] = w[-1, y] = M_x[-1, y] = \varphi_y[-1, y] = 0, N_x[-1, y] = -P; \\ v_0[1, y] = w[1, y] = M_x[1, y] = \varphi_y[1, y] = 0, N_x[1, y] = -P. \end{aligned} \quad (9)$$

Обобщенная функция перемещений, служащая разрешающей функцией  $\Phi(x, y)$  и удовлетворяющая уравнению (3) вместе с согласованными граничными условиями (9), представлена в виде разложения по системе тригонометрических функций

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL} \operatorname{ch}(\lambda_{nL} x) + (\Phi_n)_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y), \quad (10)$$

где  $x = x/a$ ,  $y = y/b$  – безразмерные координаты, отнесенные к длине  $a$  и ширине панели  $b$ ;  $(\Phi_n)_{\text{ч.н}}$  – частное решение неоднородного уравнения (3).

Компоненты напряженно-деформированного состояния, включая перемещения  $u_0(x, y)$ ,  $v_0(x, y)$ ,  $w(x, y)$ , представлены в виде разложений в одинарные тригонометрические ряды. Каждая из функций включает суммы, зависящие от тригонометрических базисных функций по переменной  $y$  и гиперболических функций по переменной  $x$ , что позволяет учитывать сложные взаимодействия напряжений и деформаций.

Для перемещений по оси  $x(u_0)$  используются коэффициенты  $A_{nL}^{u_0}$ , для перемещений по оси  $y(v_0)$  –  $B_{nL}^{v_0}$ , для перемещений по оси  $z(w)$  –  $B_{nL}^w$ . Эти коэффициенты определяют вклад каждой гармоники в общее распределение напряженно-деформированного состояния и зависят от геометрических и механических параметров системы. Данное представление позволяет точно вводить поля перемещений в ортотропных панелях с учетом геометрии и граничных условий.

Использование тригонометрических рядов обеспечивает согласованность решений и возможность аналитического представления основных компонентов напряженно-деформированного состояния (11) – (17).

Приведем компоненты напряженно-деформированного состояния в одинарных тригонометрических рядах.

Перемещения:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 A_{nL}^{u_0} \operatorname{sh}(\lambda_{nL} x) + (u_{0n})_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y); \\ v_0(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^{v_0} \operatorname{ch}(\lambda_{nL} x) + (v_{0n})_{\text{ч.н}} \right] \cos(n\pi y); \\ w(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^w \operatorname{ch}(\lambda_{nL} x) + (w_n)_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y). \end{aligned} \quad (11)$$

Углы поворота:

$$\begin{aligned}\varphi_x(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 A_{nL}^{\varphi_x} \operatorname{sh}(\lambda_{nL}x) + (\varphi_{xn})_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y); \\ \varphi_y(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^{\varphi_y} \operatorname{ch}(\lambda_{nL}x) + (\varphi_{yn})_{\text{ч.н}} \right] \cos(n\pi y).\end{aligned}\quad (12)$$

Деформации:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^{\varepsilon_x^0} \operatorname{ch}(\lambda_{nL}x) + (\varepsilon_{xn}^0)_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y); \\ \varepsilon_y^0(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^{\varepsilon_y^0} \operatorname{ch}(\lambda_{nL}x) + (\varepsilon_{yn}^0)_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y); \\ \gamma_{xy}^0(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 A_{nL}^{\gamma_{xy}^0} \operatorname{sh}(\lambda_{nL}x) + (\gamma_{xyn}^0)_{\text{ч.н}} \right] \cos(n\pi y),\end{aligned}\quad (13)$$

Кривизны:

$$\begin{aligned}K_x^0(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^{K_x^0} \operatorname{ch}(\lambda_{nL}x) + (K_{xn}^0)_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y); \\ K_y^0(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^{K_y^0} \operatorname{ch}(\lambda_{nL}x) + (K_{yn}^0)_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y); \\ K_{xy}^0(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 A_{nL}^{K_{xy}^0} \operatorname{sh}(\lambda_{nL}x) + (K_{xyn}^0)_{\text{ч.н}} \right] \cos(n\pi y).\end{aligned}\quad (14)$$

Суммарные углы поворота:

$$\begin{aligned}\psi_x(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^{\psi_x} \operatorname{ch}(\lambda_{nL}x) + (\psi_{xn})_{\text{ч.н}} \right] \cos(n\pi y); \\ \psi_y(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 A_{nL}^{\psi_y} \operatorname{sh}(\lambda_{nL}x) + (\psi_{yn})_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y).\end{aligned}\quad (15)$$

Усилия:

$$\begin{aligned}N_x(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^{N_x} \operatorname{ch}(\lambda_{nL}x) + (N_{xn})_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y); \\ N_y(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^{N_y} \operatorname{ch}(\lambda_{nL}x) + (N_{yn})_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y).\end{aligned}\quad (16)$$

Моменты:

$$\begin{aligned}M_x(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^{M_x} \operatorname{ch}(\lambda_{nL}x) + (M_{xn})_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y); \\ M_y(x, y) &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \sum_{L=1}^5 B_{nL}^{M_y} \operatorname{ch}(\lambda_{nL}x) + (M_{yn})_{\text{ч.н}} \right] \sin(n\pi y).\end{aligned}\quad (17)$$

Разработан пакет прикладных программ, реализующий задачи анализа и оптимизации конструкций из композиционных материалов на основе среды MATLAB. Проведен анализ критических нагрузок, соответствующих изгибной форме потери устойчивости углепластиковых обшивок в различных поперечных сечениях крыла, с учетом различных схем укладки слоев в композитных пакетах [16].

Приведем результаты оценки области применимости теории деформаций поперечного сдвига первого порядка и теории тонких пластин для сжатых вдоль продольной оси плоских прямоугольных углепластиковых обшивок.

На рис. 1, а приведены размеры панели в плане и условия закрепления контура. Рис. 1, б демонстрирует условия нагружения. На рис. 1, в представлена схема укладки многослойной композитной панели с несимметричной по толщине структурой.

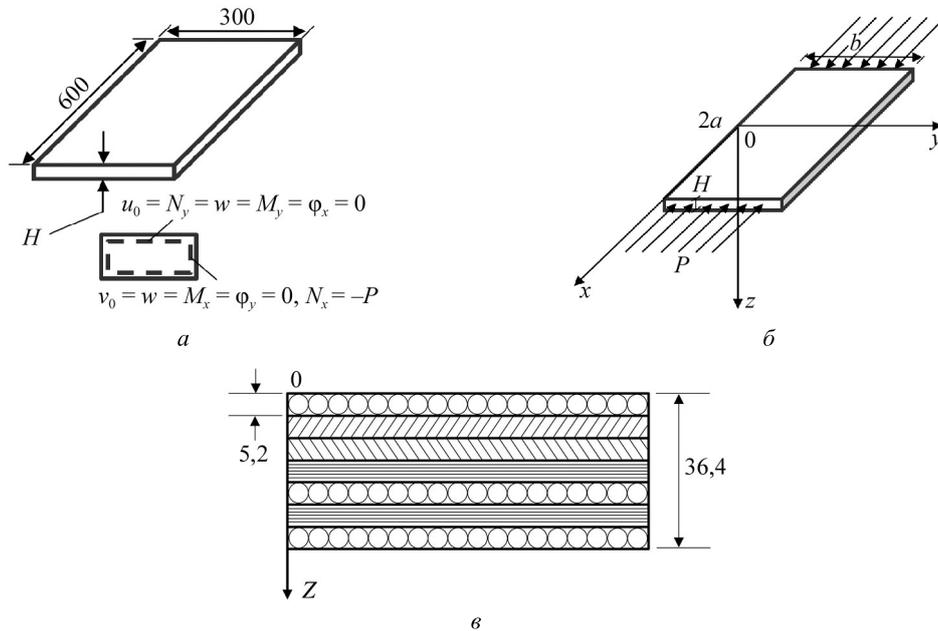


Рис. 1

Сравнение результатов расчета критических усилий, полученных с применением кинематических соотношений теории деформаций поперечного сдвига (ТДПС) и теории, основанной на классических гипотезах, при изменении отношения ширины панели  $b$  к толщине обшивки  $H$ , представлено в таблице [16].

$H$ , мм	$b/H$	$P_{крТДПС}$ , кг/мм	$\sigma_{кр}$ , кг/мм <sup>2</sup>	$P_{кр.класс}$ , кг/мм	$\Delta$ , %
3,64	84	7,73	2,12	7,76	-0,3
7,28	41	61,32	8,42	62,05	-1,2
10,92	27	203,97	18,68	209,40	-2,7
14,56	21	473,95	32,55	496,36	-4,7
18,20	16	902,81	49,60	969,77	-7,4
-	-	-	-	-	-
36,40	8	5998,50	164,79	7755,70	-29,3

Когда толщина обшивки  $H = 36,4$  мм,  $b/H = 8$ , ограничения на целевую функцию веса при оптимальном проектировании панелей вблизи корневой нервюры следует вводить по прочности на сжатие, так как средние по пакету критические напряжения соответствуют высоким значениям запасов по устойчивости.

Напряженно-деформированное состояние  $k$ -го слоя в системе координат, связанной со слоем (18), (19):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} ; \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & (m^2 - n^2) \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)}. \quad (19)$$

Ограничения на целевую функцию при оптимальном проектировании строятся в соответствии с критерием прочности Гольденבלата – Копнова в координатной плоскости 12:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{\sigma}_{1p}^{(k)}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{1c}^{(k)}} \right) \sigma_1^{(k)} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{\sigma}_{2p}^{(k)}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{2c}^{(k)}} \right) \sigma_2^{(k)} + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\bar{\sigma}_{1p}^{(k)}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{1c}^{(k)}} \right) (\sigma_1^{(k)})^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\bar{\sigma}_{2p}^{(k)}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{2c}^{(k)}} \right) (\sigma_2^{(k)})^2 + \left( \frac{\tau_{12}^{(k)}}{\bar{\tau}_{12}^{(k)}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \bar{\sigma}_{12}^{\text{экв}} \leq 1. \quad (20) \end{aligned}$$

С помощью MATLAB получены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния углепластиковой обшивки большой толщины – послойные напряжения в пакете.

Приведены результаты определения послойного напряженно-деформированного состояния ортотропной обшивки большой толщины в центре панели –  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{12}$  – в системе координат, связанной со слоем. По осям ординат обозначены координаты слоев пакета толщиной

На рис. 2 результаты расчетов напряженно-деформированного состояния соответствуют первой гармонике одинарного тригонометрического ряда  $n = 1$ . Результаты расчетов напряженно-деформированного состояния соответствуют гармонике одинарного тригонометрического ряда  $n = 3$  (рис. 3).

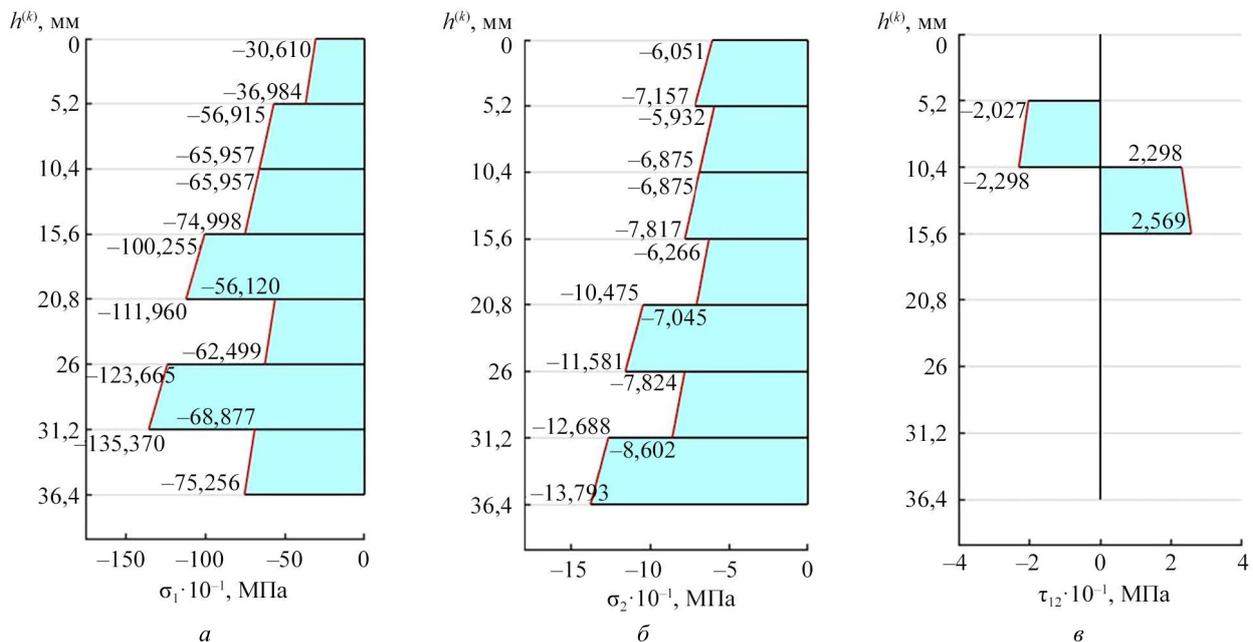


Рис. 2

На рис. 2, 3, а приведена эпюра послойных нормальных напряжений вдоль слоя  $\sigma_1$ , на рис. 2, 3, б – эпюра послойных нормальных напряжений поперек слоя  $\sigma_2$ , на рис. 2, 3, в – эпюра послойных касательных напряжений  $\tau_{12}$ .

Результаты демонстрируют быструю сходимость одинарных тригонометрических рядов. Для наглядности представления результатов эпюры напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\tau_{12}$  на рис. 2, 3 построены в разных масштабах.

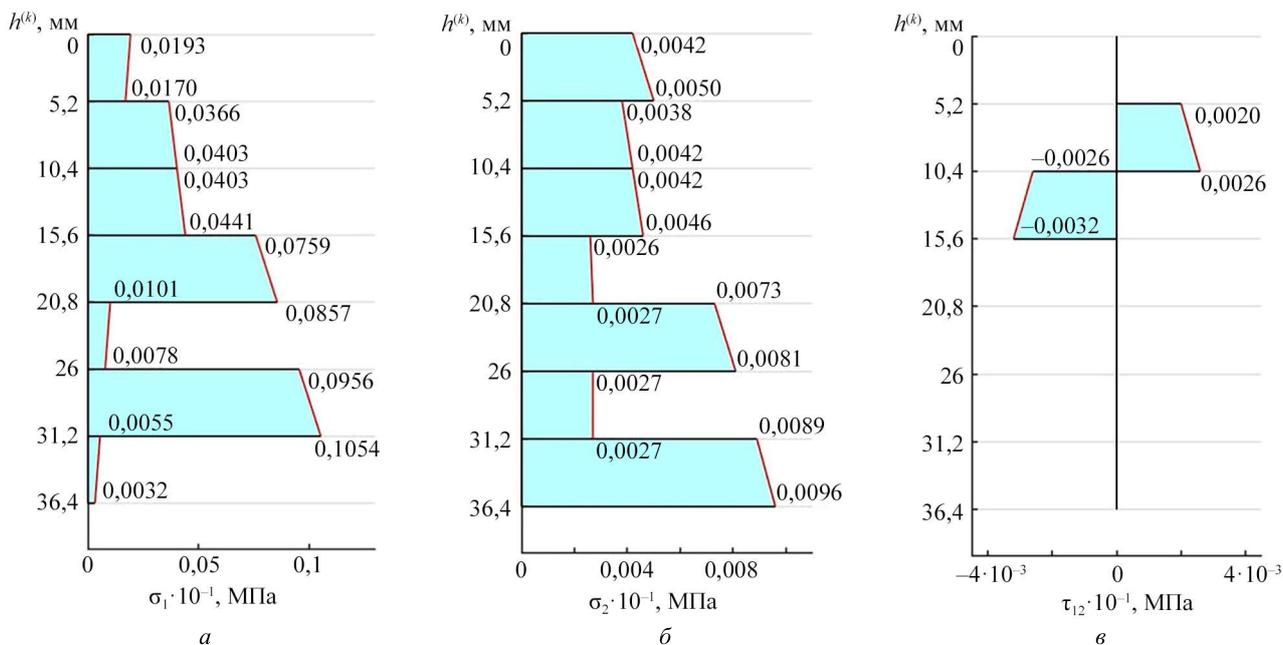


Рис. 3

Таким образом, разработаны новые аналитические уточненные ограничения по статической прочности с учетом деформаций поперечного сдвига для оптимального проектирования слоисто-анизотропных панелей летательного аппарата из композиционных материалов.

Предложенный метод оптимального проектирования представляет научно-практический интерес для разработки композитных панелей с обшивкой средней и большой толщины, используемых в местах соединения несущих поверхностей с фюзеляжем в перспективных моделях авиационной техники.

На основе построенных алгоритмов создан пакет прикладных программ для персональных компьютеров на платформе MATLAB. Программы предназначены для расчета эквивалентных послойных напряжений в слоисто-анизотропных панелях летательного аппарата, что позволяет оптимизировать процесс проектирования. С помощью анализа численных данных, включающего широкий диапазон геометрических и жесткостных характеристик композитных анизотропных панелей, подтверждена возможность проектирования с учетом аналитических ограничений по статической прочности. Ограничения впервые построены в виде одинарных тригонометрических рядов в замкнутой форме на основе решения разрешающих дифференциальных уравнений десятого порядка. Линейный дифференциальный оператор разрешающего уравнения содержит производные четного порядка по каждой из координат, если структура композитной панели ортотропна.

Поскольку решение основано на точных аналитических методах, время расчета различных вариантов минимизировано, что повышает практическую значимость разработанного подхода при реализации задач оптимального проектирования. Согласно полученным результатам расчетов возможно существенное снижение массы конструкции и оптимизации панели по весовым характеристикам. Постановка задачи и предложенный подход к решению актуальны при разработке конструктивно анизотропных композитных панелей, предназначенных для перспективных авиационных конструкций.

В рамках дальнейшего развития исследования планируется постановка задач статики и моделирование напряженно-деформированного состояния плоских прямоугольных панелей с обшивкой средней и большой толщины, выполненных из полимерных композиционных материалов, с эксцентричным продольно-поперечным набором. Разработка методов расчета основана на уточненной модели, которая учитывает деформации поперечного сдвига в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$ , а также деформации сдвига в плоскости  $xOy$ , в соответствии с теорией тонкостенных упругих стержней В.З. Власова и методами решения контактных задач для взаимодействия обшивки и элементов жесткости.

Работа подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020–2025 гг. при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение от 20 апреля 2022 № 075-15-2022-309).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Le-Anh L. et al.* Static and Frequency Optimization of Folded Laminated Composite Plates Using an Adjusted Differential Evolution Algorithm and a Smoothed Triangular Plate Element // *Composite Structures*. 2015. Vol. 127. P. 382–394.
2. *Khani A. et al.* Design of Variable Stiffness Panels for Maximum Strength Using Lamination Parameters // *Composites Part B: Engineering*. 2011. Vol. 42. № 3. P. 546–552.
3. *Peeters D., Abdallay M.* Design Guide Lines in Non-Conventional Composite Laminate Optimization // *Journal of Aircraft*. 2017. Vol. 54. Iss. 4. P. 1454–1464.
4. *Yu Wang et al.* Structural-Optimization Strategy for Composite Wing Based on Equivalent Finite Element Model // *Journal of Aircraft*. 2016. Vol. 53. Iss. 2. P. 351–359.
5. *Максименко В.Н., Олегин И.П., Пустовой Н.В.* Методы расчета на прочность и жесткость элементов конструкций из композитов. Новосибирск: НГТУ, 2015. 424 с.
6. *Балунов К.А. и др.* Многодисциплинарные аспекты в исследованиях синтеза и оптимизации конструктивно-силовых схем летательных аппаратов // *Прочность конструкций летательных аппаратов: Сб. ст. науч.-техн. конф., г. Жуковский, 8–9 дек. 2016. Жуковский: ЦАГИ, 2017. Т. 2764. С. 29–36.*
7. *Шатаев П.А., Кретов А.С.* Метод Канторовича – Власова для проектировочной оценки прочности тонкостенных конструкций // *Изв. вузов. Авиационная техника*. 2023. № 4. С. 31–40.
8. *Гриценко С.В.* Феноменологическая методика подбора рациональных параметров укладки слоев при проектировании панелей авиационных конструкций из слоистых полимерных композиционных материалов // *Конструкции из композиционных материалов*. 2019. № 4 (156). С. 45–49.
9. *Янг Н.М. и др.* Выбор рациональных конструктивных решений при проектировании элементов конструкций из полимерных композитов // *Материалы 10-й Юбилейной междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным системам, г. Алушта, 24–31 мая 2017. М.: МАИ-Принт, 2017. С. 349–350.*
10. *Киреев В.А., Казаков И.А.* Выбор рациональных параметров композитных панелей крыла // *Учен. зап. ЦАГИ*. 2023. № 3. С. 89–100.
11. *Бадрухин Ю.И., Терехова Е.С.* Рациональное проектирование тонкостенных несущих панелей из слоистого композита при комбинированном нагружении // *Вестник МАИ*. 2023. № 4. С. 130–139.
12. *Гайнутдинова Т.Ю., Мирхазов Р.Р.* Программный комплекс автоматизированного проектировочного расчета тонкостенных конструкций из композиционных материалов // *Изв. вузов. Авиационная техника*. 2011. № 4. С. 7–11.
13. *Reddy J.N.* *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. CRC Press, 2004. 855 p.
14. *Гавва Л.М., Фирсанов В.В.* Математические модели и методы расчета напряженно-деформированного состояния панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2020. № 3. С. 122–133.
15. *Бойцов Б.В. и др.* Напряженно-деформированное состояние и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления // *Изв. вузов. Авиационная техника*. 2018. № 4. С. 20–27.
16. *Фирсанов В.В., Корольский В.В., Гавва Л.М.* Ограничения по устойчивости для оптимального проектирования конструктивно анизотропных обшивок летательных аппаратов средней и большой толщины из композиционных материалов // *Конструкции из композиционных материалов*. 2024. № 3 (175). С. 23–30.

Поступила в редакцию 8.04.25  
После доработки 20.05.25  
Принята к публикации 30.05.25

## Strength-Based Design Constraints for Optimizing the Anisotropic Medium-to-Thick Composite Panels in Aircraft Structures

L.M. GAVVA AND T.A. HAN

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow

*The equations of the mathematical model for analyzing the static strength of layer-anisotropic composite panels of aircraft with medium-to-thick skins, considering the transverse shear deformations, are provided. An approach to solving the static strength problems within the framework of a new tenth-order partial differential governing equation is developed. For the special case of compatible boundary conditions on the longitudinal sides of the panel, the integral of the equation is represented analytically using the single trigonometric Fourier series. New analytical constraints on the objective function for optimal design of aircraft layer-anisotropic medium-to-thick composite skins are constructed according to the refined theory. The results of determining the layer-by-layer stress-strain state of a thick orthotropic skin at the center of the panel in the coordinate system associated with the layer are presented for flat rectangular carbon fiber skins compressed in the longitudinal direction. The feasibility of using the mathematical models reduced to the analytical solution of static strength problems for the governing equation with a tenth-order linear differential operator as constraints in the design of structurally anisotropic composite panels for advanced aerospace applications is substantiated.*

**Composite panels, transverse shear deformations, static strength, optimal design, analytical constraints**