

Определение собственных частот оболочечного элемента

**М.Е. МАРЧУК,
С.И. СЕНАШОВ,**

д-р физ.-мат. наук,

А.И. ЛЫКУМ

(СибГУ им. М.Ф. Решетнева,

Красноярск)

mmarchuk98@mail.ru

Рассматривается решение задачи определения собственных частот оболочечного элемента по типу твердотельного рефлектора космического аппарата. Предложен аналитический способ определения собственных частот оболочки из изотропного материала. Проведено сравнение частот, полученных предложенным способом и расчетом с помощью метода конечных элементов, принятого за эталонный.

Оболочечный элемент, рефлектор, собственные частоты, конечно-элементная модель, космический аппарат, жесткость

Космический аппарат представляет собой систему, состоящую из несущих конструкций, обшивки, навесного оборудования, антенн, панелей солнечных батарей и т. д. [1]. Механические нагрузки воздействуют на космический аппарат при наземном транспортировании, в процессе проведения такелажных работ, на участке выведения и орбите функционирования во время работы двигательной установки космического аппарата [2]. Механические нагрузки являются источником вибрации конструкции космического аппарата и его бортовой аппаратуры. При проектировании объектов необходимо учитывать возможность многократного увеличения амплитуд на резонансных режимах работы.

Эксплуатационные воздействия динамической природы индуцируют в системе колебательные процессы. Широкий и насыщенный спектр таких воздействий предопределяет возникновение резонансных явлений. Вследствие этого вибрационные нагрузки приобретают доминирующее значение, ограничивая прочностные характеристики и эффективность функционирования конструкции, включая агрегаты, узлы крепления оборудования, промежуточные элементы и крепежные соединения. В рамках модального анализа жесткости конструкции космического аппарата решается задача определения ее модальных параметров – собственных частот, форм колебаний и коэффициентов демпфирования, соответствующих этим частотам [1].

Параболоидные оболочки широко используются в аэрокосмических конструкциях, таких, как обтекатель ракеты, антенны связи, оптические зеркала [3].

Для конструкций, испытывающих динамические воздействия, ключевой задачей на этапе проектирования космического аппарата является определение собственных частот его элементов. В процессе разработки требуется обеспечить отсутствие резонансных явлений в заданном диапазоне частот, поскольку резонанс негативно влияет на прочностные характеристики изделия. Предотвращение резонанса достигается за счет обоснованного выбора силовой схемы конструкции и рационального использования материалов [4].

В данной работе предложено решение задачи определения собственных частот оболочечного элемента для рефлектора космического аппарата.

На рис. 1 показан рефлектор с подкрепляющей конструкцией [5, 6].



Рис. 1

В аэрокосмической технике оболочки, как правило, изготавливаются из композиционных материалов [7]. Твердотельный рефлектор представляет собой композитную конструкцию, выполненную в виде

трехслойных оболочек, в которой между несущими слоями из полимерного композиционного материала расположен наполнитель. Схема таких конструкций показана на рис. 2 [8]. Здесь: 1 – несущие слои из углепластика; 2 – сотовый наполнитель.

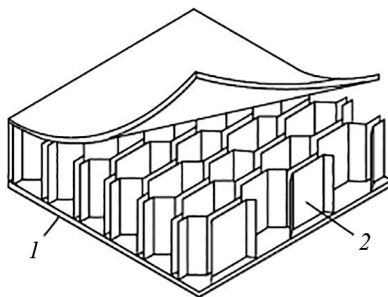


Рис. 2

Типичное поперечное сечение полной параболоидальной оболочки вращения показано на рис. 3.

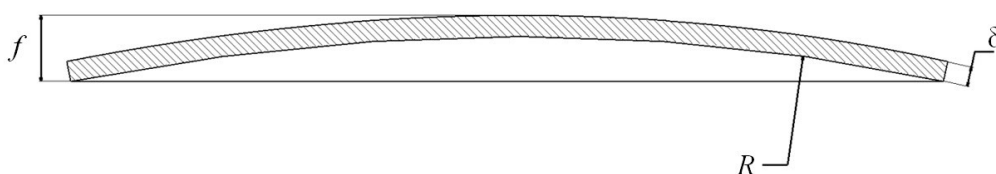


Рис. 3

Поскольку рефлектор представляет собой кривую второго порядка, а точнее, параболоид вращения, то согласно работе [9] рефлектор имеет форму параболоида вращения, заданного уравнением

$$z = h^2(x^2 + y^2), \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1. \quad (1)$$

Данная оболочка имеет круглую форму радиуса

$$L = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\sqrt{1+4h^4}}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| 2h^2 + \sqrt{1+4h^4} \right| \right).$$

Радиус кривизны параболоида равен

$$R = \frac{1}{2h^2}.$$

Тогда согласно работам [9, 10] система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} K \Delta \Delta u - \frac{1}{R} \Delta F &= -\rho \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{Et} \Delta \Delta F + \frac{1}{R} \Delta u &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $K = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность; u – отклонение по нормали от срединной поверхности; F – напряжение, возникающее в оболочке; δ – толщина оболочки; Δ – оператор Лапласа.

Оболочка закреплена по контуру. Указанная схема закрепления не соответствует реальной конструкции, однако принята в качестве первого приближения при проведении расчета.

Решение поставленной задачи сводится к решению уравнений (2). При граничных условиях

$$u|_{r=L} = 0$$

поставленную задачу решаем следующим образом.

Действуя оператором Δ на второе уравнение системы (2), в силу второго уравнения получим:

$$K\Delta\Delta u - \frac{E\delta}{R^2}u = -\rho\delta\Delta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Будем искать решения уравнения (3) в виде

$$u = A(t)w(r, \varphi), \quad (4)$$

где r, φ – полярные координаты; $w(r, \varphi)$ – произвольное решение уравнения

$$w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_\varphi = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) известно и имеет вид

$$w(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} ((n\varphi + b_{nm} \sin n\varphi)(a_{nm} \cos)) J_n \left(\frac{\mu_m^n}{L} r \right), \quad (6)$$

где μ_m^n – m -й корень уравнения $J_n(\mu) = 0$; a_{nm}, b_{nm} – произвольные постоянные.

Тогда из второго уравнения (2) получаем уравнение Пуассона для определения функции напряжения F :

$$\Delta F = -\frac{E\delta}{R}w. \quad (7)$$

Из уравнений (2), (4) получаем уравнение для определения функции $A(t)$:

$$A_{tt} + k^2 A = 0, \quad k^2 = \frac{E}{\rho R^2}. \quad (8)$$

Из уравнения (8) получаем

$$A = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Окончательно получаем следующее решение для определения нормального смещения:

$$u(r, \varphi, t) = (c_1 \sin kt + c_2 \cos kt) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{nm} \cos n\varphi + b_{nm} \sin n\varphi) J_n \left(\frac{\mu_m^n}{L} r \right);$$

$$\Delta F = -\frac{E\delta}{R^2}u. \quad (9)$$

Тогда для определения μ_m^n необходимо решить уравнение

$$\mu_m^n = Lp. \quad (10)$$

Решая это уравнение относительно n, m , получаем резонансные частоты, которые характеризуются материалом, из которого изготовлена оболочка, и радиусом кривизны оболочки.

Приведем некоторые значения нулей функций Бесселя:

$$\mu_1^0 = 2,4048, \mu_2^0 = 5,5201, \mu_3^0 = 8,6537, \dots;$$

$$\mu_1^1 = 3,0317, \mu_2^1 = 7,0156, \dots;$$

$$\mu_1^2 = 5,136, \mu_2^2 = 8,417, \dots$$

Основная резонансная частота получается из уравнения

$$p = k = \sqrt{\frac{E\delta}{\rho R^2}} \sqrt{\frac{1}{12(1-\nu^2)}}. \quad (11)$$

Основная собственная частота определяется из уравнения (11), остальные собственные частоты рассмотренного рефлектора, заданного уравнением (1), определяются формулами (10).

Для упрощения рассмотрим рефлектор (оболочку), сделанную из изотропного материала – алюминиевого сплава. Данный материал не используется в реальной конструкции, но принят для первого приближения. Оболочка жестко закреплена по контуру, запрещено перемещение по трем осям X , Y , Z и трем углам поворота R_x , R_y , R_z .

Оболочка задана уравнением

$$4\Phi Z = Y^2 + X^2, |X| \leq 1, |Y| \leq 1.$$

Для расчета зададим фокусное расстояние $\Phi = 700$ мм и толщину $\delta = 20$ мм.

Приведем физико-механические характеристики АМг.6 [11]: модуль упругости – 71 ГПа; плотность – 2640 кг/м³; коэффициент Пуассона – 0,3.

Данная задача была решена средствами программного обеспечения Femap NX Nastran [12].

На рис. 4 показана конечно-элементная модель оболочки: a – вид сбоку; b – вид спереди.

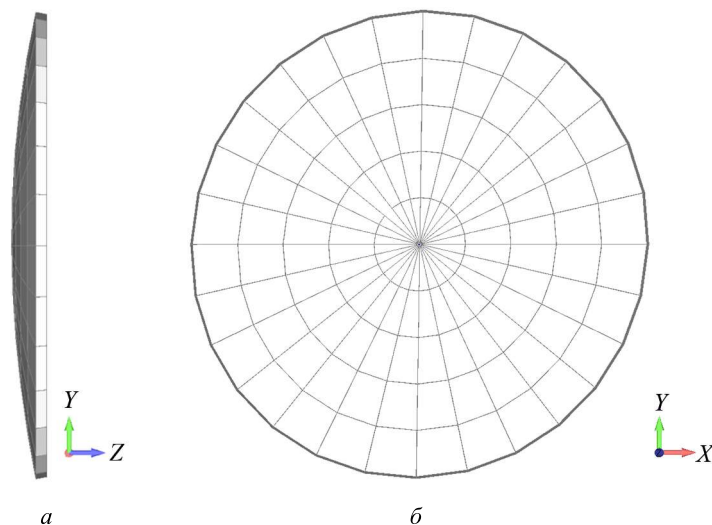


Рис. 4

При создании конечно-элементной модели использовались элементы типа plate.

Приведем формы колебаний первой 638,41 Гц (рис. 5, a) и второй 745,91 Гц (рис. 5, b) собственных частот оболочки.

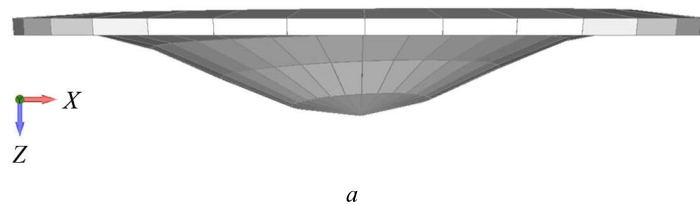
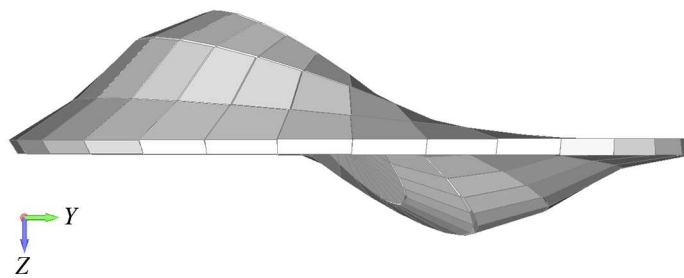


Рис. 5 (Начало)



б

Рис. 5 (Окончание)

Были определены собственные частоты и эффективная масса алюминиевой оболочки (таблица).

Номер тона	Частота, Гц	Эффективная масса, %					
		X	Y	Z	RX	RY	RZ
1	638,41	-	-	56,30	0,55	0,14	-
2	745,91	0,37	1,54	0,60	41,27	10,33	-
3	748,32	1,69	0,41	-	9,31	40,53	-
4	1050,75	-	-	0,70	-	-	-
6	1171,25	-	-	27,07	-	-	-
7	1425,49	-	-	-	0,15	-	-
8	1425,78	-	-	-	-	0,11	-
9	1680,63	0,19	0,78	-	18,75	4,71	-
10	1731,03	0,83	0,20	-	4,15	18,01	-
Итого		3,10	2,96	84,67	74,23	73,88	0,00

Приведем значения собственных частот, полученных в результате аналитического расчета: номер тона – 1; частота – 660,48 Гц.

Таким образом, предложенный способ можно использовать при аналитическом исследовании свободных колебаний оболочки, закрепленной по контуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крючков А.Н. и др. Модальный анализ солнечной панели космического аппарата // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2023. № 3. С. 36–46.
2. Чеботарев В.Е., Косенко В.Е. Основы проектирования космических аппаратов информационного обеспечения. Красноярск: СибГАУ, 2011. 488 с.
3. Kang J.-H., Leissa A.W. Free Vibration Analysis of Complete Paraboloidal Shells of Revolution with Variable Thickness and Solid Paraboloids from a Three-Dimensional Theory // Computers and Structures. 2005. Vol. 83. Iss. 31-32. P. 2594–2608.
4. Гайнутдинов В.Г., Соркин Э.М. Проектирование тонкостенной конструкции максимальной жесткости с учетом потери устойчивости панели // Изв. вузов. Авиационная техника. 2004. № 1. С. 3–5.
5. Технические характеристики спутника Ямал-402. [Электронный ресурс]. URL: http://www.gascom.ru/ru/new_projects/yamal_402/technical_performance/index.php (дата обращения: 12.09.2025).
6. Large Deployable Ultra-Light Reflector for Ka-Band Applications [Electronical Resource]. URL: <https://artes.esa.int/projects/large-deployableultra-light-reflector-ka-band-applications> (дата обращения: 12.09.2025).
7. Буянов И.А., Ростовцев М.Ю., Шелофаст В.В. Валидация системы инженерного анализа композиционных конструкций на примере расчета собственных частот антисимметричных ламинатных пластин // Изв. вузов. Авиационная техника. 2016. № 4. С. 149–154.
8. Новиков А.Д. Разработка методики определения параметров конструктивно-силовых схем прецизионных и легких рефлекторов зеркальных космических антенн межспутниковой связи: Автореф. дис... канд. техн. наук. М., 2020. 6 с.
9. Flugge W. Stresses in Shells. Springer, 1973. 525 p.
10. Huszár Z., Hegedűs I. Free Vibrations of a Paraboloid Shell // Periodica Polytechnica Civil Engineering. 2005. Vol. 49. № 1. P. 13–26.
11. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.

12. Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. М.: ДМК Пресс, 2013. 784 с.

Поступила в редакцию 12.10.25

После доработки 20.11.25

Принята к публикации 20.11.25

Determination of Natural Frequencies of a Shell Element

M.E. MARCHUK, S.I. SENASHOV, AND A.I. LYKUM

SIBSIU, Krasnoyarsk

This paper examines the solution to the problem of determining the natural frequencies of a shell element similar to a solid-state spacecraft reflector. An analytical method for determining the natural frequencies of a shell made of an isotropic material is proposed. The frequencies obtained by the proposed method are compared with those obtained by a finite element calculation, which is used as a reference.

Shell element, reflector, natural frequencies, finite element model, spacecraft, rigidity