

Методы построения квазирешений обратной краевой задачи аэрогидромеханики

П.Н. ИВАНШИН,
канд. физ.-мат. наук
(КФУ, Казань)
pivanshin@gmail.com

Рассмотрены различные квазирешения обратной краевой задачи аэрогидромеханики в нормированных пространствах. Приведен пример, демонстрирующий отличия квазирешений друг от друга.

Обратная краевая задача аэрогидромеханики, квазирешение, нормированное пространство

Постановку и решение обратной краевой задачи аэрогидромеханики осуществил Г.Г. Тумашев [1, 2]. Известны условия разрешимости, которые возникают после построения соответствия между параметрами дуг контуров и не могут быть обеспечены при постановке задачи.

Пусть дано распределение скоростей $v(s)$ вдоль неизвестного контура C . Необходимо восстановить форму контура C при условии, что s – дуговая абсцисса искомого контура. Пусть длина контура равна l , точка разветвления потока имеет дуговую координату s_a , точка схода потока соответствует значениям параметра $s = 0$, $s = l$. Пусть $v(s) < 0$ при $s \in [0, s_a]$, $v(s) > 0$ при $s \in (s_a, l]$.

Сопоставляя комплексные потенциалы обтекания искомого контура C в плоскости $z = x + iy$ и обтекания единичной окружности в плоскости $\zeta = re^{it}$, находим соответствие $s = s(t)$ между параметрами контуров. Далее восстанавливается функция $z = z(\zeta)$, отображающая внешность единичного круга на область течения в плоскости z .

Условие замкнутости контура C состоит в том, что функция $\ln|v(t)|$ удовлетворяет комплексному равенству

$$\int_0^{2\pi} \ln|v(t)| e^{it} dt = A + iB. \quad (1)$$

Таким образом, первое условие задает коэффициенты разложения Фурье функции $\ln|v(t)|$ при $\cos(t)$ и $\sin(t)$.

Второе условие на $\ln|v(t)|$ получается из механических требований к решению. Так как скорость движения потока v_∞ считается фиксированной, то получим условие на $\ln|v(t)|$ в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} \ln|v(t)| dt = C. \quad (2)$$

Заметим, что значения констант A , B , C в условиях (1), (2) зависят от вида модифицированной функции Жуковского – Митчелла [2, 3].

Таким образом, поставленная задача в общем случае не имеет решения.

Заметим, что существуют различные методы модификации распределения скоростей, с тем чтобы оно удовлетворяло указанным требованиям. Например, в

работе [3] вводятся дополнительные параметры, позволяющие решить эту задачу.

В 1984 г. А.М. Елизаров [4] предложил применять для решения обратной краевой задачи аэрогидромеханики квазирешения. Понятие «квазирешение» ранее было введено В.К. Ивановым [5, 6] и в применении к рассматриваемой задаче определяется следующим образом.

Определение. Пусть решение поставленной обратной краевой задачи аэрогидромеханики с заданием v_∞ приводит к функции $\ln|v(t)|$, которая не входит в множество U функций с требуемыми первыми коэффициентами разложения $\ln|v(t)|$ в ряд Фурье. Тогда квазирешением этой задачи назовем аэродинамический профиль, для построения которого функция $\ln|v(t)|$ заменена на такую функцию $q_0(t) \in U \subset P$ (где P – нормированное пространство), для которой

$$\|\ln|v(t)| - q_0(t)\|_P = \min_{q \in P} \|\ln|v(t)| - q(t)\|_P,$$

т.е. необходимо изменить функцию $\ln|v(t)|$ так, чтобы удовлетворялись приведенные условия (1), (2). При этом изменятся и исходные данные, т.е. функция $v(s)$.

В работе [7] предлагается следующая конструкция. Вместо $\ln|v(t)|$ рассматривается функция $\ln|v(t)f(t)|$ такая, что $\ln|v(t)f(t)|$ удовлетворяет условиям (1), (2). Очевидно, что изменить $\ln|v(t)|$ необходимо минимально, т.е. ищем $\ln|f(t)|$ с минимальной нормой.

А.М. Елизаровым [4] было построено квазирешение, которое, по введенной здесь терминологии, минимизирует норму $\ln|f(t)|$ в пространстве L^2 . При этом метод построения квазирешения [4] заключался в том, что функция $\ln|f(t)|$ представляла собой простейший полином Фурье, обеспечивающий необходимые требования к разложению Фурье функции $\ln|v(t)|$.

В данной статье рассматриваем функции $f(t)$, минимизирующие норму $\|\ln|\widetilde{f(t)}|\|_\infty + \lambda \left\| \left(\ln|\widetilde{f(t)}| \right)' \right\|_\infty =$

$$= \max_{t \in [0, 2\pi]} \left\| \ln|\widetilde{f(t)}| \right\| + \lambda \max_{t \in [0, 2\pi]} \left\| \left(\ln|\widetilde{f(t)}| \right)' \right\|, \quad \lambda > 0 \text{ при } \lambda = 1/2$$

$$\text{и функционал } \int_0^{2\pi} \left| \left(\ln|\widetilde{f(t)}| \right)^{(n)} \right| dt.$$

Заметим, что на множестве непрерывных периодических функций с фиксированными первыми тремя

коэффициентами функционалы $\int_0^{2\pi} \left| \left(\Phi^{(n)}(t) - \Psi^{(n)}(t) \right) \right| dt$ являются метриками, поэтому в данной статье используется этот функционал в качестве нормы. Построены квазирешения, приближающие заданные распределения скоростей в соответствующих пространствах.

Обозначим через $F(t)$ функцию $\ln|f(t)|$. В соответствии с условиями (1), (2) можно считать, что функция F должна удовлетворять следующим условиям:

$$\int_0^{2\pi} F(t) dt = C'; \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi} F(t) \sin(t) dt = K > 0; \quad (4)$$

$$\int_0^{2\pi} F(t) \cos(t) dt = 0. \quad (5)$$

В работе приведено сравнение основанных на применении стандартных функциональных норм методов построения так называемых квазирешений обратной краевой задачи аэрогидромеханики. Расширение множества квазирешений может помочь при построении контуров с необходимыми свойствами.

Квазирешение, минимизирующее $\|F\|_\infty + 1/2\|F'\|_\infty$

Здесь и далее для применения условий (4) и (5) заменяем параметр t на $t + \alpha_0$, где α_0 – некоторый фиксированный угол.

В работе [7] были построены квазирешения, минимизирующие $\|F\|_\infty + \lambda\|F'\|_\infty$. В приведенном здесь примере строим квазирешение для $\lambda = 1/2$. Выбор λ обусловлен тем, что при $\lambda < 1,17\dots$ получим функцию по норме $\|\cdot\|_\infty$ большую, чем функцию, минимизирующую норму $\|\cdot\|_2$. При достаточно больших λ получим функцию со слишком большой производной, т.е. восстанавливаемый контур станет сильно искривлен в некоторых точках. Таким образом, выбран функционал

$$\max_{t \in [0, 2\pi]} |F(t)| + 1/2 \max_{t \in [0, 2\pi]} |F'(t)|.$$

Приведем решение.

Найдем функцию $F_0(t) \in T \subset W^{1,\infty}([0, 2\pi]) \cap C^1([0, 2\pi])$, где T – подкласс 2π -периодических функций, удовлетворяющих условиям (3) – (5), такую, что

$$\|F_0\|_\infty + 1/2\|F_0'\|_\infty = \min_{F \in T} (\|F\|_\infty + 1/2\|F'\|_\infty).$$

Построим кусочно-гладкую функцию, склеенную из функций вида $\pm c(1 - e^{\pm 2t})$.

Для случая

$$\frac{4C'}{5K} < \frac{2\pi - 1 + e^{-2\pi}}{1 + e^{-2\pi}} \approx 5,2752 \quad (6)$$

рассмотрим функцию:

$$F_0(t) = \begin{cases} c(1 - e^{-2(t+\alpha)}), & t \in [-\alpha, \pi/2]; \\ c(1 - e^{2(t-\pi-\alpha)}), & t \in [\pi/2, \pi+\alpha]; \\ c(e^{-2(t-\pi-\alpha)} - 1), & t \in [\pi+\alpha, 3\pi/2]; \\ c(e^{2(t-2\pi+\alpha)} - 1), & t \in [3\pi/2, 2\pi-\alpha]. \end{cases} \quad (7)$$

Неизвестные константу c и постоянную α найдем из системы

$$\begin{aligned} 2c(2\alpha - e^{-\pi} \operatorname{sh}(2\alpha)) &= C'; \\ \frac{8}{5}c(2\cos(\alpha) + e^{-\pi} \operatorname{ch}(2\alpha)) &= K. \end{aligned}$$

Это значит, что постоянная α – решение уравнения

$$\frac{2\alpha - e^{-\pi} \operatorname{sh}(2\alpha)}{2\cos(\alpha) + e^{-\pi} \operatorname{ch}(2\alpha)} = \frac{4C'}{5K},$$

имеющего единственное решение в интервале $(0, \pi/2)$, если выполняется условие (6).

В том случае, когда неравенство (6) не выполняется, т.е.

$$\frac{4C'}{5K} \geq \frac{2\pi - 1 + e^{-2\pi}}{1 + e^{-2\pi}},$$

в качестве решения задачи рассмотрим функцию

$$F_0(t) = \begin{cases} c(1 - e^{-2(t+\alpha)}), & t \in [-\pi/2, \pi/2]; \\ c(1 - e^{2(t-\pi-\alpha)}), & t \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь система относительно констант a и c имеет вид

$$c(2\pi - 2\operatorname{sh}(\pi)e^{-2\alpha}) = C'; \quad c\frac{8}{5}\operatorname{ch}(\pi)e^{-2\alpha} = K.$$

Система имеет единственное решение относительно константы a при $a \geq \pi/2$. Очевидно, что при $K \rightarrow 0$ получим $a \rightarrow +\infty$ и $F_0(t) \equiv c$.

Квазирешение, минимизирующее $L(1, n)$

Приведем решение поставленной ранее задачи для функционалов $L(1, n)(f) = \int_0^{2\pi} |f^{(n)}(t)| dt$.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу. Найдем на множестве обобщенных интегрируемых на отрезке $[0, 2\pi]$ функций, удовлетворяющих условиям (3) – (5), функцию с минимальной нормой $\|f\|_1$.

Приведем решение, используемое для построения решений других задач, которые приводят к построению контуров, имеющих механический смысл.

Утверждение 1. Функция, определенная по формуле

$$F_0(t) = \frac{C' + K}{2} \delta_{\pi/2}(t) + \frac{C' - K}{2} \delta_{3\pi/2}(t), \quad (9)$$

решает задачу.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательствам утверждений [7].

Приведем решения задачи для $L(1, n)$, которых нет в работе [7]. Доказательство соответствующих результатов достаточно громоздко и несколько отличается от доказательств [7].

Найдем на множестве интегрируемых и дифференцируемых на отрезке $[0, 2\pi]$ функций, удовлетворяющих условиям (3) – (5), функцию F_1 с минимальным значением $L(1, n)(f)$.

Условия (3) – (5) примут вид

$$\begin{aligned} C' &= (-1)^n \int_0^{2\pi} f^{(n)}(t)(t - \pi/2)^n dt; \\ K' &= \int_0^{2\pi} f^{(n)}(t) \sin(t + n\pi/2) dt; \\ 0 &= \int_0^{2\pi} f^{(n)}(t) \cos(t + n\pi/2) dt. \end{aligned}$$

Поскольку получили условия на производные, решение задачи для $L(1, n)$ будет интегралом от решения для простейшего случая. При этом F_1 – кусочно-полиномиальная функция. Например, функция, минимизирующая $L(1, 1)$, кусочно-постоянна, $L(1, 2)$ – кусочно-линейна и т.д. Приведем решения поставленной задачи для функционалов $L(1, n)$.

Пусть $n = 2k - 1$.

$$F_1(t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k-1} P_j ((t - \pi/2) \bmod 2\pi)^{2j}; \\ t \in [0, \pi + \alpha] \cup [2\pi - \alpha, 2\pi]; \\ \sum_{j=0}^{k-1} Q_j (t - 3\pi/2)^{2j}, t \in (\pi + \alpha, 2\pi - \alpha). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь P_j, Q_j и α – такие вещественные константы, что

$$\begin{aligned} 1) \quad F_{1,+}^{(l)}(\pi + \alpha) &= F_{1,-}^{(l)}(\pi + \alpha) = -F_{1,+}^{(l)}(2\pi - \alpha) = \\ &= -F_{1,-}^{(l)}(2\pi - \alpha), l = 0, \dots, n - 3; \end{aligned}$$

2) выполнены условия (3) – (5).

Для $n = 2k$

$$F_1(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k-1} P_j (t - \pi/2)^{2j-1} + P_0, t \in [\pi/2, 3\pi/2]; \\ \sum_{j=1}^{k-1} Q_j (t - 3\pi/2)^{2j-1} + Q_0; \\ t \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi). \end{cases} \quad (11)$$

Здесь P_j, Q_j такие, что

$$1) \quad F_{1,+}^{(l)}(\pi/2) = F_{1,-}^{(l)}(\pi/2), F_{1,+}^{(l)}(3\pi/2) = F_{1,-}^{(l)}(3\pi/2), \\ l = 0, \dots, n - 3;$$

2) выполнены условия (3) – (5).

В частности, для $n = 3$ решение – кусочно-полиномиальная функция

$$F_1(t) = \begin{cases} -a(t - \pi/2)^2 + b, t \in [\pi/2 - \sqrt{b/a}, \pi/2 + \sqrt{b/a}]; \\ c(t - 3\pi/2)^2 - d, t \in [3\pi/2 - \sqrt{c/d}, 3\pi/2 + \sqrt{c/d}]. \end{cases} \quad (12)$$

Для того чтобы найти константы a, b, c, d , необходимо решить следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{4}{3} \left(\frac{b^{3/2}}{a^{3/2}} - \frac{d^{3/2}}{c^{3/2}} \right) = K; \\ ab = cd; \\ \sqrt{\frac{b}{a}} = \pi - \sqrt{\frac{d}{c}}; \\ 4 \left(a \left(\sin \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \right) - \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right) + \right. \\ \left. + c \left(\sin \left(\sqrt{\frac{d}{c}} \right) - \sqrt{\frac{d}{c}} \cos \left(\sqrt{\frac{d}{c}} \right) \right) \right) = C'. \end{cases} \quad (13)$$

Пример. Построим квазирешения задачи для норм $\|F\|_2, \|F\|_\infty + 1/2 \|F'\|_\infty$ и $L(1, 3)(F)$.

Рассмотрим достаточно естественное распределение скорости, выраженное в параметре t ($v_\infty = 2,6$, набегающий поток горизонтален, угол атаки показан стрелкой на каждом контуре). Параметр t выбран, поскольку все вычисления проводились относительно угла, а не длины дуги. Построение решений приведено в соответствии с методом [8] (критические точки на канонической области симметричны относительно вертикальной оси координат). Скорость постоянна и максимальна на отрезке $[0, 3, 1, 3]$ на верхней части крыла $t \in [-0, 43, 2, 8]$, точка 2,8 – точка схода потока.

На рис. 1 приведены распределения скоростей для решений в норме $\|F\|_2, \|F\|_\infty + 1/2 \|F'\|_\infty$ и функционала $L(1, 3)$. Здесь: fun1 – распределение, соответствующее минимизации $\|F\|_2$, fun2 – минимизации $L(1, 3)$, fun3 – минимизации $\|F\|_\infty + 1/2 \|F'\|_\infty$, fun4 – исходное распределение скорости.

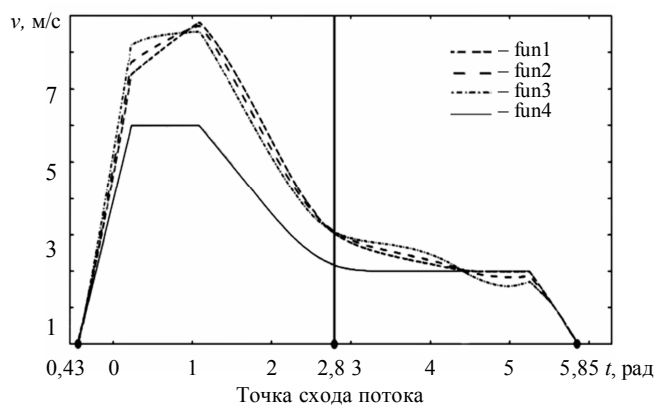


Рис. 1

Видим, что интегральные решения в большинстве точек лучше приближают исходное распределение скорости, но оптимальное максимальное отклонение от исходного решения реализует решение в норме $\|F\|_\infty + 1/2 \|F'\|_\infty$.

На рис. 2 приведены крыловые профили, соответствующие построенным решениям: *a* – контур, соответствующий минимизации $\|F\|_2$; *б* – минимизации $L(1, 3)$; *в* – минимизации $\|F\|_\infty + 1/2 \|F'\|_\infty$; *г* – разомкнутый контур, соответствующий начальному распределению скорости.

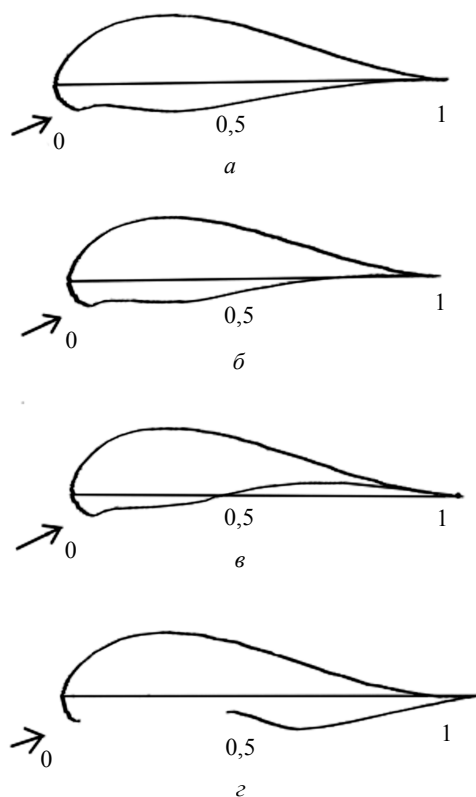


Рис. 2

Можно заметить, что профиль, соответствующий решению в норме $\|F\|_\infty + 1/2 \|F'\|_\infty$, уже профилей, соответствующих другим решениям, т.е. сопротивление формы для этой нормы должно быть меньше.

Таким образом, рассмотрены различные квазирешения обратной краевой задачи аэрогидродинамики,

обобщающие традиционное. При этом использование норм $\|F\|_\infty + 1/2 \|F'\|_\infty$ и $L(1, 3)$ влечет меньшее, чем при использовании $\|F\|_2$, отличие деформированного распределения скоростей от исходного, но на большем множестве, что существенно влияет на вид восстановленного контура. Квазирешение, построенное по норме $\|F\|_\infty + 1/2 \|F'\|_\infty$, – контур с гладкой границей, кривизна которой разрывна; квазирешение, построенное с использованием функционала $L(1, 3)$, – контур с границей гладкости класса C^2 . Увеличение количества квазирешений приводит к большему выбору при построении крыловых профилей для различных требований.

Полученные результаты можно использовать при решении подобных задач, например, задачи восстановления профиля по кавитационной диаграмме [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тумашев Г.Г. Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления // Учен. зап. Казан. ун-та. 1952. Т. 112. № 3. С. 3–41.
2. Нужин М.Т., Тумашев Г.Г. Обратные краевые задачи и их приложения в гидроаэромеханике // Тр. семинара по крайевым задачам. Т. 7. Казань: Изд-во КГУ, 1970. С. 18–27.
3. Ильинский Н.Б., Абзалилов Д.Ф. Математические проблемы проектирования крыловых профилей: усложненные схемы течения, построение и оптимизация формы крыловых профилей. Казань: Изд-во КГУ, 2011. 284 с.
4. Елизаров А.М. О квазирешениях внешней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Математика. 1984. № 10. С. 42–50.
5. Иванов В.К. О линейных некорректных задачах // Доклады АН СССР. 1962. Т. 145. № 2. С. 270–272.
6. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах: Матем. сб. 1963. Т. 61(103). № 2. С. 211–223.
7. Иваницин П.Н. О квазирешениях обратной краевой задачи аэрогидродинамики // Изв. вузов. Математика. 2013. № 5. С. 13–24.
8. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань: Изд-во КГУ, 1965. 333 с.
9. Авхадиев Ф.Г., Маклаков Д.В. Критерий разрешимости задачи построения профилей по кавитационной диаграмме // Изв. вузов. Математика. 1994. № 7. С. 3–12.

Поступила в редакцию
6.02.13

Methods of Constructing Quasisolutions in Inverse Boundary-Value Aerohydrodynamics Problems

P.N. IVAN'SHIN

The different quasisolutions of the inverse boundary-value problem of aerohydrodynamics in the normed spaces are considered. An example presented demonstrates the distinctions of quasisolutions.

Inverse boundary-value problem of aerohydrodynamics, quasisolution, normed space